企業価値評価とCAPM

工　藤　裕　孝

I．はじめに

最近、M&A 等が盛んになり企業価値の評価という問題がクローズアップされている。評価の方法としては、期待キャッシュフローを割引計算して現在価値を求めるというエンタープライズ DCF 法が使われている。割引率として利用されるのは加重平均資本コスト（weighted average cost of capital）であり、略して WACC と呼ばれる。WACC の計算には CAPM が利用されている。

実は、CAPM の創始者の一人であるモッシンは［5］［6］の中で、企業評価式を使って企業価値を求め、投資決定および最適資本構成問題を検討している。

本稿の目的は、このモッシンのモデルを検討することである。まず、資本市場の一般均衡について検討し、均衡ではどのような条件および性質が成立しているのか、そして企業評価式がどのようにして導出されるのか、見ていくことにしよう。

以下の各節は次のような内容になっている。II節は、CAPM の創始者の一人であるモッシンの評価とプロフィールを紹介する。III節では、本稿のモデルで使用する記号の意味について述べている。IV節では資本市場の均衡モデルを取り扱い、均衡下ではどのようなことが成立しているのか検討される。V節では、均衡式から企業評価式を導出する。VI節は、結びである。

II．CAPM とモッシン

1960年代、4人の経済学者ジョン・リントナー［2］［3］、ヤン・モッシン［4］、ウィリアム・シャープ［9］そしてジャック・トレイナー［12］達が証券収

益に関する同一のモデルを展開した。後に、資本資産評価モデル（the capital asset pricing model：略してCAPM）として知られるもので、投資理論と実務に革命をもたらすことになる。

この業績によって、シャープのみが1990年のノーベル経済学賞を受賞している。なぜなら、当時リントナー（1983年没）とモッシン（1987年没）はすでに亡くなっており、トレイナーはCAPMの創始者の一人として認められてはいるが、公刊された論文がないためにノーベル賞の候補とはならなかった。このことについては、クレイグ［1］が詳しい。

本稿では、モッシン［6］の一般均衡モデルと企業評価式を取り上げるが、その前にモッシンのことについて簡単に紹介しておきたい[1]。なぜなら、彼のプロフィールは日本ではあまり知られていないからである。

モッシンは1936年ノルウェーのオスローに生まれ、1959年にノルウェー経済大学を卒業している。その後、ピッツバーグのカーネギー技術学校（現在、カーネーギーメロン大学）の大学院で経済学の研究を行う。研究の対象は、金融市場のリスクについてである。学位論文「リスク負担（Risk Bearing）についての研究」の最後の章は、CAPM分析の基礎となる章が含まれている。モッシンは自身の論文の重要性を理解し、学位請求論文終了2年前の1968年にその章を公刊している。それが論文［4］である。現在、モッシンがCAPMの研究をいつ始めたのか、他の3人の研究について何を知っていたかについてはわかっていない。これは、CAPMをだれが最初に導出したのかというオリジナル性が問題になっているためである[2]。彼の論文の1ページに注記されているように、修正原稿がエコノメトリカ（Econometrica）に受領されたのは1965年である。ジャーナルに論文が提出された時とモデルの最初の草案が書かれた時の間に1年のラグがあると仮定すると、モッシン

1　サリバン［16］参照。

2　特に、リントナーについては、トレイナーとの関係からCAPMの創始者ということについて疑義が出されている。クレイグ［1］参照。

がCAPMの研究を始めたのは、シャープが論文を発表した1964年より早くはないということが出来よう。実際、モッシンはシャープの論文を［4］で引用し、「均衡条件の特定化の不正確さ」を批判しているからである。

モッシンは1960年代の後半から1970年代にかけて2本の論文［4］［5］と2冊の本［6］［7］を書いている。このうち、［4］ではE-V（期待値－分散）分析が用いられており、［5］と［6］では2次効用関数が使用されている。日本においてなじみ深いものは、論文［5］と［6］の本であろう。

Ⅲ．記号

Ⅳ節で使用する記号の意味を以下のように決めておくことにしよう。

i　：　投資家（$i=1,2,\cdots,m$）

W_i　：　期首の富

m_i　：　純貸付額

j　：　企業（$j=1,2,\cdots,n$）

z_{ij}　：　投資家iによるj企業株の持分比率

p_j　：　j企業株の市場価値

Y_i　：　期末の富

r　：　$1+r^*$、r^*は安全利子率

X_j　：　j企業の総収益（$E(X_j)=\mu_j, \sigma_{jk}=E(X_j-\mu_j)(X_k-\mu_k)$）

$E(\cdot)$：　期待演算子

d_j　：　j企業の負債額

v_j　：　j企業の市場価値、$v_j=p_j+d_j$

U_i　：　効用関数

Ⅳ．資本市場均衡モデル

仮定および定義を述べることにしよう。

【仮定1】　投資家はすべてリスク回避者である。

投資家は、危険が増すほど不測の損失を被る偶然が高まることを嫌う。

【仮定2】　投資家はポートフォリオを選択する場合、その期待効用を最大化するように行動するものとする。

【仮定3】　モデルは、純粋交換経済モデルであり、交換対象は債券（bonds）[3]と普通株（company ordinary shares）の2種類とする。

債券は、利子率が一定であり、企業あるいは投資家自身によって発行される。企業の投資および資金調達決定は所与とされる。

【定義】　X_j は確率変数であり、j 企業の総収益とする。

【仮定4】　投資家の期待は同質である。すなわち、すべての投資家にとって μ_j と σ_{jk} （$j=1,2,\cdots,n, k=1,2,\cdots,n$）は同一の値となる。

これは、市場で入手可能な証券の将来収益に関する推定値に対して、すべての投資家が同意することを意味している。すなわち、すべての投資家はポートフォリオの選択を総収益 X_j の同一の期待値 μ_j および共分散 σ_{jk} に基づいて行うことを意味している。

【仮定5】　債務不履行リスクは、企業および個人投資家の両者に存在しない。

すべての貸付（個人に対する貸付あるいは社債保有という形での企業に対する貸付）は、リスクのない投資（無危険投資）であると考えられる。したがって、社債はすべて完全に代替可能であり、企業別に区別する必要はなくなる。

3　企業の発行する債券は社債であるから、企業に対しては社債という用語を使用することにする。

【仮定6】　資本市場は完全競争市場である。

この仮定は、任意の2証券が完全な代替物であり、投資家にとって同額の購入費用がかかることを意味する。また、無危険債権の利子率は、すべて同じである。これは、すべての投資家および企業が、同じ無危険利子率で、自由に貸借できることを意味する。

【仮定7】　税制は存在せず、モデルは一期間モデルである。

以上の仮定および定義に基づいて、一般均衡モデルを構築しよう。

需要と供給の均等を保証する市場清算条件（the market clearing conditions）は

$$(4 \cdot 1) \qquad \begin{aligned} &\sum_i z_{ij} = 1 \\ &\sum_i m_i = \sum_j d_j \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m : j = 1, 2, \cdots, n)$$

である。第一の方程式のセットは、企業の株式がすべての投資家によって保有されていることを意味している。したがって、j 企業について、すべての投資家の持分比率を合計すると1になる。第二の方程式のセットは、集計すると、投資家の純貸付額と企業債券の総供給額が等しくならなければならないことを意味している。この式は、投資家間の貸借関係が、集計によって相殺されるために成立する。

各投資家 i の予算制約式は

$$(4 \cdot 2) \qquad W_i = m_i + \sum_j z_{ij} p_j \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

である。投資家 i の期末の富は

$$Y_i = rm_i + \sum_j z_{ij}(X_j - rd_j)$$

である。$(X_j - rd_j)$ は、企業 j が債務の元利を支払った後に株主が受け取る金額である。上式の m_i に（4・2）式を代入すると

$$(4 \cdot 3) \qquad \begin{aligned} Y_i &= rW_i + \sum_j z_{ij}(X_j - rd_j - rp_j) \\ &= rW_i + \sum_i z_{ij}(X_j - rv_j) \end{aligned}$$

である。これより、期末の富の確率分布は、投資家がどのようなポートフォリオを購入しても、企業の市場価値のみに依存し、この市場価値が株式と社債でどのように構成されているかということとは無関係である。

投資家によって選好されるポートフォリオは、【仮定2】によって、次式

$$U = E\left[u_i(Y)\right]$$

を最大化するものである。したがって、（4・3）式より、各投資家の株式に対する需要関数は

$$(4 \cdot 4) \qquad \frac{\partial U}{\partial z_{ij}} = E\left[u_i'(Y_i)(X_j - rv_j)\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m : j = 1, 2, \cdots, n)$$

である[4]。ただし、効用関数 U は、von Neuman-Morgensternの公理を満たし、$U'(\cdot) > 0$、$U''(\cdot) < 0$ である。他方、投資家の純貸付額は（4・2）式により決まる。

---

[4] 2階の条件はみたされているものとする。

均衡モデルでは、市場清算条件の1つが余分となる。なぜなら、期首の富が時価表示による投資家の期首保有額の価値から成るためである。期首保有額を$\overline{m_i}$、$\overline{z_{ij}}$で表すと

$$W_i = \overline{m_i} + \sum_j \overline{z_{ij}} p_j$$

である。期首の配分は

$$\sum_i \overline{z_{ij}} = 1 \quad , \quad \sum_i \overline{m_i} = \sum_j d_j$$

をみたす。したがって

$$\begin{aligned}\sum_i W_i &= \sum_i \overline{m_i} + \sum_i \sum_j \overline{z_{ij}} p_j \\ &= \sum_j d_j + \sum_j p_j \\ &= \sum_j v_j\end{aligned}$$

である。すなわち、投資家の富の合計は、企業価値の合計に等しい。(4・1) 式と (4・2) 式がすべてみたされている配分を考えることにする。i について、(4・2) 式を合計すると

$$\sum_i m_i + \sum_i \sum_j z_{ij} p_j = \sum_j v_j$$

であり、(4・1) 式を使うと、$\sum_i m_i = \sum_j d_j$である。よって、n個の独立な市場清算条件を持つことになる。

このように、完全モデルは (4・1) 式、(4・2) 式そして (4・4) 式の

$m(n+1)+n$ 個の独立な方程式から構成される。決定変数は z_{ij} の mn 個、m_i の m 個、p_j の n 個、パラメーターは W_i、Y_i、X_j、r、v_j である。原則的には、モデル内には $n+1$ 個の価格がある。すなわち、n 個の株価 p_j と無危険資産の価格 $1/r$ である。しかし、方程式は n 個の変数を決定できるだけの数しかない。このことは、価格の1つが任意に決定できることを意味している。ここで利子率が外生的に与えられるものとする。すなわちニュメレールと考える。したがって、モデルは資産間の収益率の比率を決定できる。

ここで、次の仮定を追加しよう。

【仮定8】　投資家の効用関数は

$$u_i(Y_i)=Y_i-c_iY_i^2 \qquad (i=1,2,\cdots,m)$$

である[5]。

これより、投資家の需要関数は

---

[5] u_i の期待値を取ると、期待効用は

$$E\left[u_i\right]=\mu_Y^i-c_i(u_Y^{i\,2}+\sigma_Y^{i\,2})$$

である。ただし、$\sigma_Y^{i\,2}$ は分散である。これを σ_Y^i（標準偏差）に関して偏微分すると $\partial E\left[u_i\right]/\partial\sigma_Y^i=-2c_i\sigma_Y^i$ となる。ここで投資家を危険増加の選好特性に応じてリスク回避者、リスク中立者、リスク愛好者の3つの類型に分けられる。本稿では、【仮定1】より、投資家はリスク回避者なので $\partial E\left[u_i\right]/\partial\sigma_Y^i<0$ である。したがって、この定義と $\sigma_Y^i>0$ により、$c_i>0$ である。

また、この効用関数は放物線なので、正の限界効用 $du_i/dY_i=1-2c_iY_i>0$ より定義域は $Y_i<1/2c_i$ である。

(4・5)
$$\sum_k z_{ik}\left[\sigma_{jk}+(\mu_j-rv_j)(\mu_k-rv_k)\right]=(\mu_j-rv_j)(\frac{1}{2c_i}-rW_i)$$
［数学注1］

である。ここで $z_1^*, z_2^*, \cdots, z_n^*$ を

$$\sum_k z_{ik}\left[\sigma_{jk}+(\mu_j-rv_j)(\mu_k-rv_k)\right]=(\mu_j-rv_j)$$

の解とすると、(4・5) 式の解は

(4・6)
$$z_{ij}=z_j^*(\frac{1}{2c_i}-rW_i) \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

である。i について (4・6) 式を合計すると

$$\sum_i z_{ij}=z_j^*(\sum_i\frac{1}{2c_i}-r\sum_i W_i)$$

であり、市場清算条件 (3・1) 式より

$$z_j^*(\sum_i\frac{1}{2c_i}-r\sum_i W_i)=1$$

である。したがって

$$z_j^* = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - r\sum_i W_i}$$

である。これを（4・6）式に代入すると

$$(4\cdot7)\qquad z_{ij} = \frac{\frac{1}{2c_i} - rW_i}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - r\sum_i W_i}$$

である。これは

$$z_{i1} = z_{i2} = \cdots = z_{in}$$

を意味している。すなわち、均衡では、すべての投資家はすべての企業の発行済株式を同一の割合で保有することを意味している。注意しなければならないことは、この割合 z_i はそれぞれの投資家によって異なるということである。例えば、投資家がある企業の発行済株式の2%を保有するならば、他の企業の株式すべてを2%保有することを意味している。

すべての j 株式について、$z_{ij} = z_i$ であるポートフォリオをバランス・ポートフォリオ（a balanced portforio）と呼ぶことにする。

投資家 i が、企業 j の株式に投資した金額を x_{ij} とすると、$z_{ij} = x_{ij} / p_j$ である。ポートフォリオがバランスしているならば、任意の2人の投資家 r と s について

$$\frac{x_{rj}}{p_j} = \frac{x_{rk}}{p_k} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n : k = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\frac{x_{sj}}{p_j} = \frac{x_{sk}}{p_k} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n : k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。したがって

$$\frac{x_{rj}}{x_{sj}} = \frac{x_{rk}}{x_{sk}} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n : k = 1, 2, \cdots, n)$$

である。すなわち、任意の2人の投資家が株式を保有するその金額間の割合は、すべての証券について同一であることがわかる。

また、(4・7) 式から、価格が均衡状態にある時、投資家は空売りを行わないことがわかる。なぜなら、$U'(\cdot) > 0$ によって、投資家は効用が増加する範囲で、証券の交換、空売りおよび貸借活動を行うからである。すなわち（注5）の $1/2c_i > Y_i$ より $1/2c_i - Y_i > 0$。$0 < rW_i < Y_i$ と仮定すると $1/2c_i - rW_i > 0$ である。よって、総計しても同様である。したがって $z_{ij} > 0$ である。この結果が生じる理由は【仮定4】の期待の同質性のためである。

V. 市場評価式

すべての k について $z_{ik} = z_i$ なので、(4・5) 式の総和記号の外側に z_{ik} をくくり出すことが出来る。そして、(4・5) 式に (4・7) 式を代入すると

$$\sum_k \left[\sigma_{ik} + (\mu_j - rv_j)(\mu_k - rv_k) \right]$$
$$= (\mu_j - rv_j)(\sum_i \frac{1}{2c_i} - r\sum_i W_i)$$

であり

$$\sum_k \sigma_{ik} + (\mu_j - rv_j)(\sum_k \mu_k - r\sum_k v_k)$$

(5・1)

$$= (\mu_j - rv_j)(\sum_i \frac{1}{2c_i} - r\sum_i W_i)$$

である。ここで $\sum_i W_i = \sum_k v_k$ なので

$$\sum_k \sigma_{jk} - (\mu_j - rv_j)(\sum_i \frac{1}{2c_i} - \sum_k \mu_k) = 0$$

である。v_j について整理すると

$$v_j = \frac{1}{r}\left(\mu_j - \frac{\sum_k \sigma_{jk}}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - \sum_k \mu_k} \right)$$

である。ここで

$$b_j = \sum_k \sigma_{jk}$$

$$R = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - \sum_k \mu_k}$$

とすると、企業の均衡価値は

(5・2)　$$v_j = \frac{1}{r}(\mu_j - Rb_j)$$

である。これは、均衡下における j 企業の市場価値が期待収益からリスクを

控除し、その差額を無危険利子率で割引計算することによって得られることを意味している。

リスクの修正項 Rb_j は2つの要素から構成されている。第1の要素 b_j は、j 企業と他の企業すべての収益に関する共分散の合計である。これは、j 企業による市場の総分散への寄与と考えることが出来る。なぜなら

$$\sum_j b_j = \sum_j \sum_k \sigma_{jk} = Var(\sum_j X_j) \qquad \text{[数学注2]}$$

だからである。言い換えると、b_j は X_j と市場収益の合計間の共分散

$$b_j = Cov(X_j, \sum_k X_k) \qquad \text{[数学注3]}$$

である。これは j 企業の「組織的リスク（systematic risk)」と呼ばれる

第2の要素 R は、企業のリスク尺度 b_j のウェイト因子と考えられる。この R は、すべての企業について同一であり、「市場のリスク回避（market risk aversion)」とみなすことが出来る。なぜなら、R は、すべての投資家のリスク回避を調和平均したものだからである。すなわち

$$R = \frac{1}{\sum_i E\left(\frac{1}{R_i}\right)} \qquad \text{[数学注4]}$$

である。ただし、

$$R_i = -\frac{U_i''(Y_i)}{U_i'(Y_i)}$$

である。

また、企業価値が同一であるような μ_j と b_j のすべての組合せを考えると

$$R = \frac{d\mu_j}{db_j} \qquad (\forall\ j)$$

である。これは、R が、企業のリスク尺度における1単位の増加を相殺するために必要とされる、期待収益の増加額を表している。この意味で、R は「リスクの市場価格（a market price for risk)」と考えることが出来る。

Ⅵ. 結び

モッシンは、投資決定の応用例として論文［5］で企業評価式を活用している。その他にも、ルビンシュタイン［8］のように、CAPM の応用例を挙げたものもある。モッシン自身は、早くからCAPM を使って導出した企業評価式を投資等に応用している。

本稿は、［6］の企業評価式の導出を整理したものである。ここでは、2次効用関数を利用したものを紹介したが、E-V 法による導出も取り上げられている。

この企業評価式の応用範囲は広い。今後さらに検討の必要があるであろう。

[数学注]

1)（4・4）式より

$$E\left[u_i'(Y_i)(X_j - rv_j)\right] = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m : j = 1, 2, \cdots, n)$$

であり、

$$u_i(Y_i) = Y_i - c_i Y_i^2 \quad より \quad u_i'(Y_i) = 1 - 2c_i Y_i \quad である。$$

よって

$$E\left[(1-2c_iY_i)(X_j-rv_j)\right]=0$$

であり、展開すると

$$\mu_j-rv_j-2c_i\left[E(X_jY_i)-rv_jE(Y_i)\right]=0$$

である。ここで（4・3）式から

$$E(Y_i)=E\left[rW_i+\sum_k z_{ik}(X_k-rv_k)\right]$$
$$=rW_i+\sum_k z_{ik}(\mu_k-rv_k)$$

$$E(X_jY_i)=rW_i\mu_j+E\left[X_j\sum_k z_{ik}(X_k-rv_k)\right]$$
$$=rW_i\mu_j+\sum_k z_{ik}\left[E(X_jX_k)-rv_kE(X_j)\right]$$
$$=rW_i\mu_j+\sum_k z_{ik}\left[\sigma_{jk}+\mu_j(\mu_k-rv_k)\right]$$

であるから

$$\mu_j-rv_j-2c_i\left\{rW_i\mu_j+\sum_k z_{ik}\left[\sigma_{jk}+\mu_j(\mu_k-rv_k)\right]-rv_j\left[rW_i+\sum_k z_{ik}(\mu_k-rv_k)\right]\right\}=0$$

である。したがって、整理すると

$$\sum_k z_{ik}\left[\sigma_{jk}+(\mu_j-rv_j)(\mu_k-rv_k)\right]=(\mu_j-rv_j)\left(\frac{1}{2c_i}-rW_i\right)$$

である。

2)
$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}=\sum_{j=1}^{n}(\sigma_{j1}+\cdots+\sigma_{jn})$$
$$=(\sigma_{11}+\cdots+\sigma_{1n})+(\sigma_{21}+\cdots+\sigma_{2n})+\cdots+(\sigma_{n1}+\cdots+\sigma_{nn})$$

である。ここで

$$\sigma_{11}=E(X_1-\mu_1)(X_1-\mu_1)=E(X_1^2)-\mu_1^2,\cdots$$
$$\cdots,\sigma_{1n}=E(X_1-\mu_1)(X_n-\mu_n)=E(X_1X_n)-\mu_1\mu_n,\cdots$$
$$\cdots,\sigma_{nn}=E(X_n-\mu_n)(X_n-\mu_n)=E(X_n^2)-\mu_n^2$$

である。したがって

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sigma_{jk}=\left\{E(X_1^2)+E(X_1X_2)+\cdots+E(X_n^2)\right\}-(\mu_1^2+\mu_1\mu_2+\cdots+\mu_n^2)$$
$$=Var(\sum_j X_j)\qquad(\because Var(X)=E(X^2)-\left\{E(X)\right\}^2)$$

である。

3)

$$b_j=\sum_k\sigma_{jk}=\sigma_{j1}+\sigma_{j2}+\cdots+\sigma_{jk}$$
$$=E(X_j-\mu_j)(X_1-\mu_1)+E(X_j-\mu_j)(X_2-\mu_2)+\cdots+E(X_j-\mu_j)(X_3-\mu_3)$$
$$=E\left[X_j\sum_k X_k-X_jE(\sum_k X_k)-\mu_j\sum_k X_k+\mu_jE(\sum_k X_k)\right]$$
$$=E(X_j\sum_k X_k)-\mu_jE(\sum_k X_k)$$

$$Cov(X_j\sum_k X_k)$$
$$=E\left[(X_j-\mu_j)(\sum_k X_k-E(\sum_k X_k))\right]$$
$$=E\left[X_j\sum_k X_k-X_jE(\sum_k X_k)-\mu_j\sum_k X_k+\mu_jE(\sum_k X_k)\right]$$
$$=E(X_j\sum_k X_k)-\mu_jE(\sum_k X_k)$$

である。したがって

$$b_j = Cov(X_j, \sum_k X_k)$$

である。

4)
$$R_i = \frac{2c_i}{1-2c_iY_i} = \frac{1}{\frac{1}{2c_i} - Y_i}$$

である。ここで（4・3）式より

$$\begin{aligned}\sum_i E(Y_i) &= \sum_i E\left[rW_i + \sum_k z_{ik}(X_k - rv_k) \right] \\ &= r\sum_k v_k + \sum_i \sum_k z_{ik}(E(X_k)) - r\sum_i \sum_k z_{ik} v_k \quad (\because \sum_i W_i = \sum_k v_k) \\ &= \sum_k E(X_k) = \sum_k \mu_k\end{aligned}$$

である。したがって

$$\begin{aligned}R &= \frac{1}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - \sum_k \mu_k} = \frac{1}{\sum_i \frac{1}{2c_i} - \sum_i E(Y_i)} = \frac{1}{\sum_i E(\frac{1}{2c_i} - Y_i)} \\ &= \frac{1}{\sum_i E(\frac{1}{R_i})}\end{aligned}$$

である。

参考文献

[1] Craig W. French. "The Treynor Capital Asset Pricing Model," *The Journal of Investment Management*, vol.1, No.2, 2003, pp.60–72.

[2] Lintner J., "The Valuation of Risk Asset and the Selection of Risky Investment in Stock Portfolios and Capital Budgets," *The Review of Economics and Statistics*, 73, (1965a), pp.13–37.

[3] Lintner J., "Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversifica-

tions," *The Journal of Finance* 20, (1965b), pp.587–615.

[4] Mossin J., "Equilibriun in a Capital Asset Market," Econometrica, 34, 1966, pp.768–783.

[5] Mossin J., "Security Pricing and Investment Criteria in Competitive Markets," *The American Economic Review*, 59, 1969, pp.749–756.

[6] Mossin J., *Theory of Financial Markets*, Prentice-Hall, 1973.

[7] Mossin J., *The Economic Efficiency of Financial Market*, Lexington Books, 1977.

[8] Rubinstein M. E., "A Mean-Variance Synthesis of Corporate Financial Theory," *The Journal of Finance*, Vol. 28, No. 1. (Mar., 1973), pp. 167–181.

[9] Sharpe W. F., "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Condisions of Risk," *The Journal of Finance*, September, 1964, pp.425–442.

[10] Stone B. K., *Risk, Return, and Equilibrium: A General Single-Period Theory of Asset Selection and Capital Market Equilibrium*, Cambridge: Mit Press.

[11] Sullivan, E. J. "A Brief History of the Capital Asset Pricing Model," APUBEF Proceedings, Fall 2006 (Association of Pennsylvania University Business and Economics Faculty).

[12] Treynor J. L., "Toward a Theory of Market Value of Risky Assets." Unpublished manuscript. "Rough Draft" dated by Mr. Treynor to the fall of 1962. A final version was published in 1999, in *Asset Pricing and Portfolio Performance*. Robert A. Korajczyk (editor) London: Risk Books, pp.15–22.