ヒルベルト型不等式の絶対定数
Absolute Constant in Hilbert's type Inequality

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0191, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We prove here an inequality on the absolute constant in Hilbert's type inequality .

Key words ; the Hilbert type inequality, the Montgomery-Vaughan inequality, large sieve inequality.
Mathematics Subject Classification 2010; 11N35.

Hilbert の不等式は元来 Hilbert が Hilbert 変換という積分変換を導入した際に考察された不等式で積分形であるが、次の離散型の不等式をそう呼ぶことが今日一般的である (下式の分母の − が + になっている場合も Hilbert の不等式と呼ばれている.)。Hilbert は任意の複

素数列 $\{w_r\}$ $(r = 1, 2, \cdots)$ に対して

$$|\sum_{r \neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{r - s}| \leq C \sum_r |w_r|^2, \ with\ C = 2\pi \quad \text{（収束するとする.）}$$

を証明し、後に Schur[7] が、ここに現れた絶対定数 $C = 2\pi$ を $C = \pi$ と改良したが、この絶対定数 $C = \pi$ は best possible 最良である。

1974 年、Montgomery と Vaughan[2] は、上記不等式を一般化して次の二つの不等式:
$0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, 任意の複素数列 $\{w_r\}$ $(r = 2, 3, \cdots)$ に対して、

$$\begin{aligned} \delta &:= \inf_{r \neq s} |\lambda_r - \lambda_s|, &(1)\\ \delta_r &:= \inf_s |\lambda_s - \lambda_r| &(2) \end{aligned}$$

と定義すると、$\delta > 0$, $\delta_r > 0$ の場合

$$\begin{aligned} |\sum_{r \neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}| &\leq \pi \delta^{-1} \sum_r |w_r|^2 \quad \text{（右辺は収束）} &(3)\\ |\sum_{r \neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}| &\leq \frac{3}{2}\pi \sum_r |w_r|^2 \delta_r^{-1} \quad \text{（右辺は収束）} &(4) \end{aligned}$$

を証明したが、式 (3) に現れている絶対定数 π は上記 Schur の場合を考えれば best possible 最良であるが、式 (4) に現れている絶対定数は最良ではなく、A.Selberg により、3.2 と出来ることが分かっていて (未公刊 unpublished)、その最良絶対定数 best possible absolute constant は π であろうと予想されている [1]。更に又、E.Preissmann は [5] で $\frac{4\pi}{3} = 4.188790\cdots$ を得ているが、これが今まで公刊されたもので最良のものであろう。即ち、式 (4) の最良絶対定数 best possible absolute constant を見出す事は現在未解決問題であるが、この論文では、次の定理 1, 定理 2, 定理 3 を証明する。
尚、積分型の式 (4) の絶対定数については、予想通り π であることが、M.Papadimitrakis[4] により証明されている。

定理 1　$0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, 任意の複素数列 $\{w_r\}$ $(r = 2, 3, \cdots, R,$ R は任意の十分大である自然数) に対して、

$$|\sum_{r \neq s} w_r \frac{1}{\lambda_r - \lambda_s} \overline{w_s}| \leq C \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1}$$

$$\textit{with an absolute constant } C \leq \{3(\max_t \sum_{r; r \neq t} \frac{\delta_r \delta_t}{(\lambda_r - \lambda_t)^2})\}^{1/2}$$

定理 2　$0 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$, 任意の複素数列 $\{w_r\}$ $(r = 2, 3, \cdots, R,$ R は任意の十分大である自然数) に対して、

$$\begin{aligned} & |\sum_{r \neq s} w_r \frac{1}{\lambda_r - \lambda_s} \overline{w_s}| \\ \leq \ & (\sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1})^{1/2} \\ \times \ & \{\sum_s |w_s|^2 \delta_s^{-1} \sum_{r; r \neq s} \frac{\delta_r \delta_s}{(\lambda_r - \lambda_s)^2} \\ + \ & \sum_s \overline{w_s} \delta_s^{-1} \sum_{t; t \neq s} \frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} w_t + \sum_t w_t \delta_t^{-1} \sum_{s; s \neq t} \frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} \overline{w_s}\}^{1/2} \end{aligned}$$

定理 3　定理 2 と同じ条件下で

$$\begin{aligned} & |\sum_{r \neq s} w_r \frac{1}{\lambda_r - \lambda_s} \overline{w_s}| \\ \leq \ & (\sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1})^{1/2} \times \{3(\max_t \sum_{r; r \neq t} \frac{\delta_r \delta_t}{(\lambda_r - \lambda_t)^2}) \sum_s |w_s|^2 \delta_s^{-1}\}^{1/2} \\ \leq \ & \{3(\max_t \sum_{r; r \neq t} \frac{\delta_r \delta_t}{(\lambda_r - \lambda_t)^2})\}^{1/2} \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1} \end{aligned}$$

が成り立つ。

定理 2 の証明

Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使うことにより、

$$|\sum_{r \neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}| = |\sum_r w_r \delta_r{}^{-1/2} \delta_r{}^{1/2} \sum_{s; s \neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}|$$

$$\leq (\sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1})^{1/2} \{ \sum_r \delta_r \mid \sum_{s;s \neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} |^2 \}^{1/2}$$

となるが、上記右辺の第2因子について

$$\sum_r \delta_r \mid \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} |^2 \leq C^2 \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1} \ (C \text{ は絶対定数})$$

なる評価が得られれば、

$$\begin{aligned} |\sum_{r \neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}| &\leq (\sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1})^{1/2} [C^2 \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1}]^{1/2} \\ &= C \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1} \end{aligned}$$

となり、目標とする不等式が得られる。従って我々は、

$$\sum_r \delta_r | \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} |^2 \leq C^2 \sum_r |w_r|^2 \delta_r{}^{-1} \ (C \text{ は絶対定数})$$

なる不等式で絶対定数 C を出来るだけ小さくして π に近づけるようなものを得んとする。

$$\begin{aligned} & \sum_r \delta_r \mid \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} |^2 = \sum_r \delta_r \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} \sum_{t;t\neq r} \overline{\frac{\overline{w_t}}{\lambda_r - \lambda_t}} \\ = \quad & \sum_r \delta_r \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} \sum_{t;t\neq r} \frac{w_t}{\lambda_r - \lambda_t} \\ = \quad & \sum_{s,t} \overline{w_s} w_t \sum_{r;r\neq s, r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\ = \quad & \{ \sum_{s,t;s=t} + \sum_{s,t;s\neq t} \} \overline{w_s} w_t \sum_{r;r\neq s, r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\ = \quad & \sum_s |w_s|^2 \sum_{r;r\neq s} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-2} \\ & + \sum_{s,t;s\neq t} \overline{w_s} w_t \sum_{r;r\neq s, r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\ =: \quad & \Sigma_1 + \Sigma_2 \qquad \cdots (1) \end{aligned}$$

とする。Σ_2 については、

$$
\begin{aligned}
\Sigma_2 \equiv & \sum_{s,t;s\neq t} \overline{w_s} w_t \sum_{r;r\neq s,r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\
= & \sum_{s,t;s\neq t} \overline{w_s} w_t \frac{1}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq s,r\neq t} \delta_r \{ (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} - (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \} \\
= & \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq s,r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} \\
& - \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq s,r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\
= & \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \{ \sum_{r;r\neq s} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} - \delta_t (\lambda_t - \lambda_s)^{-1} \} \\
& - \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \{ \sum_{r;r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} - \delta_s (\lambda_s - \lambda_t)^{-1} \} \\
= & \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq s} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} \\
& - \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_t)^{-1} \\
& + \sum_{s,t;s\neq t} \delta_t \frac{\overline{w_s} w_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} + \sum_{s,t;s\neq t} \delta_s \frac{\overline{w_s} w_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} \\
=: & \Sigma_3 - \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 \qquad \cdots (2)
\end{aligned}
$$

歪対称行列 $(\frac{1}{\lambda_r - \lambda_s})$ に付随する 2 次形式

$$
|\sum_{r\neq s} \frac{w_r \overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s}|
$$

の最大値はその行列 $(\frac{1}{\lambda_r - \lambda_s})$ の絶対値最大の固有値の絶対値に等しく、その固有 vector：$\boldsymbol{w} = (w_s)$　が与えることが分かっているので([3] を参照)、ここに現れている $\boldsymbol{w} = (w_s)$ を固有 vector と考えても一般性を失わず、その付随する歪対称行列 $(\frac{1}{\lambda_r - \lambda_s})$ の固有値を $i\mu$ (i は

虚数単位, $\mu \in \mathbf{R}$) とする。このことを使って、Σ_3 と Σ_4 を計算する:

$$\Sigma_3 \equiv \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq s} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-1} =$$

$$\sum_s \overline{w_s} \sum_{r;r\neq s} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_s} \sum_{t;t\neq s} \frac{1}{\lambda_s - \lambda_t} w_t = \sum_s \overline{w_s} \sum_{r;r\neq s} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_s} i\mu w_s$$

$$= i\mu \sum_s \overline{w_s} w_s \sum_{r;r\neq s} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_s} = i\mu \sum_s |w_s|^2 \sum_{r;r\neq s} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_s}$$

同様にして

$$\Sigma_4 \equiv \sum_{s,t;s\neq t} \frac{\overline{w_s} w_t}{\lambda_s - \lambda_t} \sum_{r;r\neq t} \delta_r (\lambda_r - \lambda_t)^{-1}$$

$$= \sum_t w_t \sum_{r;r\neq t} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_t} \sum_{s;s\neq t} \frac{-1}{\lambda_t - \lambda_s} \overline{w_s}$$

$$= \sum_t w_t \sum_{r;r\neq t} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_t} (-1) \overline{i\mu w_t}$$

$$= \sum_t w_t \sum_{r;r\neq t} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_t} i\mu \overline{w_t} = i\mu \sum_t |w_t|^2 \sum_{r;r\neq t} \frac{\delta_r}{\lambda_r - \lambda_t}$$

以上より $\Sigma_3 = \Sigma_4$. 従って

$$\Sigma_2 = \Sigma_3 - \Sigma_4 + \Sigma_5 + \Sigma_6 = \Sigma_5 + \Sigma_6$$

となり

$$\sum_r \delta_r \mid \sum_{s;s\neq r} \frac{\overline{w_s}}{\lambda_r - \lambda_s} |^2 = \Sigma_1 + \Sigma_5 + \Sigma_6$$

$$= \sum_s |w_s|^2 \sum_{r;r\neq s} \delta_r (\lambda_r - \lambda_s)^{-2}$$

$$+ \sum_{s,t;s\neq t} \delta_t \frac{\overline{w_s} w_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} + \sum_{s,t;s\neq t} \delta_s \frac{\overline{w_s} w_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2}$$

$$= \sum_s |w_s|^2 \delta_s^{-1} \sum_{r;r\neq s} \frac{\delta_r \delta_s}{(\lambda_r - \lambda_s)^2}$$

$$+ \sum_s \overline{w_s} \delta_s^{-1} \sum_{t;t\neq s} \frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} w_t + \sum_t w_t \delta_t^{-1} \sum_{s;s\neq t} \frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2} \overline{w_s}$$

を得る。□（定理 2 の証明終わり）

定理 3 の証明

次の補題を使う。

補題 1 [3] 束縛条件：

$$\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x} \neq 0, \ (B \text{ は正定値行列})$$

下での、2 次形式の比：

$$\frac{|\boldsymbol{x}^* A \boldsymbol{x}|}{|\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x}|}$$

の最大値は $A\boldsymbol{x}_0 = \lambda B \boldsymbol{x}_0$ を満たす $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$ が与え、その最大値は $|\lambda|$ であり、λ は、$|A - \lambda B| = 0$ の絶対値が最大の根 *root or solution* である。ここで A, B は行列、$\boldsymbol{x}$ はベクトル、λ は複素数である。

定理 3 の証明 (続き)

定理 2 の右辺第 2 項、第 3 項に上記補題 1 を

$$A = (\delta_{ls}\delta_s^{-1})\left(\frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2}\right) =: BD, \ B = (\delta_{ls}\delta_s^{-1})$$

(δ_{ls} は Kronecker の delta 記号) として使うと、$|(\delta_{ls}\delta_s^{-1})| \neq 0$ より、上記第 2 項、第 3 項は

$$\begin{aligned} |A - \lambda B| &= \left|(\delta_{ls}\delta_s^{-1})\left(\frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2}\right) - \lambda(\delta_{ls}\delta_s^{-1})\right| \\ &= |(\delta_{ls}\delta_s^{-1})|\left|\left(\frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2}\right) - \lambda I\right| = |B||D - \lambda I| = 0 \end{aligned}$$

即ち、

$$\left|\left(\frac{\delta_s \delta_t}{(\lambda_s - \lambda_t)^2}\right) - \lambda I\right| = |D - \lambda I| = 0, \ (I \text{ は単位行列})$$

の絶対値最大の根、行列 D の絶対値最大の固有値 eigenvalue：$\lambda_{\max}(D)$ の絶対値 $|\lambda_{\max}(D)|$ で上から評価される。従って

$$\begin{aligned} |\sum_s \overline{w_s}\delta_s^{-1} \sum_{t;t\neq s} \frac{\delta_s\delta_t}{(\lambda_s-\lambda_t)^2} w_t| &\equiv |w^* BDw| \\ &\leq |\lambda_{\max}(D)||w^* Bw| \end{aligned}$$

を得る。

ここで、Gerschgorin の定理 Gerschgorin's Theorem[8] を行列

$$D = (\frac{\delta_s\delta_t}{(\lambda_s-\lambda_t)^2})$$

に使うと

$$|\lambda_{\max}(D)| \leq \max_t \sum_{r;r\neq t} \frac{\delta_r\delta_t}{(\lambda_r-\lambda_t)^2}$$

これは、定理2の右辺第1項の因子と等しくなるので、定理の証明は完了する。□ (定理3の証明終わり)

定理1の証明 定理3より明らかである。

参考文献

[1] Montgomery,H.L. : The analytic principle of the large sieve, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **84**(1978), 547-567.

[2] Montgomery,H.L. and Vaughan,R.C. : Hilbert's inequality, *J. London Math. Soc.*,(2),**8**(1974), 73-82.

[3] Nakajima,M. : A Generalization of Rayleigh-Ritz's Theorem Rayleigh-Ritz の定理の一般化, to appear

[4] Papadimitrakis,M. : A note on a generalization of Hilbert's inequality, 1997, http://web.cs.dal.ca/ jborwein/Preprints/Papers/Published-InPress/Hilbert/Papers/papadim.pdf

[5] Preissmann,E. : Sur une inégalité de Montgomery et Vaughan, *Enseignement Mathématique*, 1984.

[6] Preissmann,E. and Lévêque, O.: On generalized weighted Hilbert matrices, 2012, http://ipg.epfl.ch/leveque/Publications/preissmann-leveque2.pdf

[7] Schur,I. : Bemerkungen zur Theorie der beschrankten Bilinearformen mit unendlich vielen Verändlichen, *J. Reine Angew. Math.* , **140**(1911), 1-28.

[8] Yamamoto,T 山本哲郎 : Introduction to Numerical Analysis 数値解析入門, 2nd ed. 増訂版, 2003, Science-Sha サイエンス社, Tokyo 東京, (viii+273)pp..