Herbrandの演繹メタ定理の逆(注意)
The Inverse of Herbrand's Deduction Meta-Theorem(A Remark)

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

In this paper we give the inverse of Herbrand's deduction meta-theorem which is not seen in almost all text books as far as the author knows.

Key words ; Herbrand's deduction meta-theorem,
deduction theorem,
Mathematics Subject Classification 2020; 03B05,03B10,03B22.

この論文で使用する論理公理系はHilbert-Ackermann系Hilbert-Ackermann's system である。[1]
これから述べる Herbrand の演繹メタ定理 Herbrand's Deduction Meta-Theorem は述語論理でも成り立っている。

[1]Hilbert-Ackermann 系は８つの公理 (述語論理では更に２つ加えて 10 個) と１つの推論規則 (述語論理では２つ加えて３つ) からなるが，複数の公理系が知られており，Hilbert-Ackermann 系は出来るだけ推論規則の個数を少なくするものであり，その対極として２つの Gentzen 系では公理の個数を出来るだけ少なくしている。

Hilbert-Ackermann 系の公理系
A, B, C を任意の論理式とする：

公理

1. $A \to (B \to A)$
2. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
3. $A \to (B \to A \wedge B)$
4. $(A \wedge B) \to A$

$4'$. $(A \wedge B) \to B$

5. $A \to (A \vee B)$

$5'$. $B \to (A \vee B)$

6. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
8. $(\neg\neg A) \to A$
9. $A(t) \to \exists x A(x)$
10. $\forall x A(x) \to A(t)$

推論規則

1. $A, A \to B \vdash B$　($modus\ ponens$)
2. $A(a) \to C \vdash \exists x A(x) \to C$ (但し C は a を含まない)
3. $C \to A(a) \vdash C \to \forall x A(x)$ (但し C は a を含まない)

$\square$

Herbrand の演繹メタ定理 Herbrand's Deduction Meta-Theorem
$T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}, A, B$ を任意の論理式とすると

$$T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}, A \vdash B \text{ ならば, } T_1, T_2, \cdots, T_{n-1} \vdash A \to B.$$

となる。$\square$

定理 1 (Herbrand の演繹メタ定理の逆 the Inverse of Herbrand's Deduction Meta-Theorem)
$T_1, T_2, \cdots, T_{n-1}$ をまとめて Γ と書く事とすると

$$\Gamma \vdash A \to B \text{ ならば} \Gamma, A \vdash B$$

となる。$\square$

証明

$$\cfrac{\Gamma, A \quad \cfrac{\Gamma}{A \to B}}{B}$$

(最後の所でmodus ponensを使った。)

従って, $\Gamma, A \vdash B$.　□

附録

「矛盾からは任意の論理式が導ける」と云う事の証明をあまり見かけないので，以下に3通りの証明をする。

$\bot := B \wedge \neg B$ *with some* B (Bは論理式)

と定義し，これを矛盾contradictionと云う。

定理 A

$\bot \vdash A$ (Aは任意の論理式)

これを証明する為に次の補題を使う：

補題 1 (**帰謬法，背理法contradiction**)

$\Gamma,\ A \vdash \bot$ならば，$\Gamma \vdash \neg A$.

証明　$\bot = B \wedge \neg B$として

$\Gamma,\ A \vdash \bot$ は $\Gamma,\ A \vdash B \cdots (1)$ と $\Gamma,\ A \vdash \neg B \cdots (2)$

を意味している。
(1) にHerbrandの演繹メタ定理を使うと $\Gamma \vdash A \to B \cdots (3)$ が得られ，
(3) と公理7. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$ にmodus ponensを使って

$$\frac{A \to B,\ (A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)}{(A \to \neg B) \to \neg A \cdots (4)}$$

次に (2) にHerbrandの演繹メタ定理を使うと $\Gamma \vdash A \to \neg B \cdots (5)$ が得られ，(5) と (4) にmodus ponensを使って

$$\frac{A \to \neg B,\ (A \to \neg B) \to \neg A}{\neg A \cdots (6)}$$

結局，前提 $\Gamma,\ A \vdash \bot$ から $\neg A \cdots (6)$ が導けたので
$\Gamma,\ A \vdash \bot$ ならば，$\Gamma \vdash \neg A.$ となる。□

定理 A の第 1 証明

公理 5. $A \to (A \vee B)$ は前提なしに成り立つので
$\vdash A \to (A \vee B)$。$A,\ B$ は任意であるので $A = \bot,\ B = \neg C$ を代入して
$\vdash \bot \to (\bot \vee \neg C)$ となる。これに Herbrand の演繹メタ定理の逆を使うと

$\bot \vdash \bot \vee \neg C$ 従って $\bot \vee \neg C,\ \bot$ が前提となる。

この前提に補題 1 を使うと

$$\bot \vee \neg C,\ \bot\ \vdash \neg(\bot \vee \neg C) = \neg\bot \wedge (\neg\neg C) = \neg\bot \wedge C$$

最後に公理 4′. $\vdash (A \wedge B) \to B$ に Herbrand の演繹メタ定理の逆を使って

$$(A \wedge B) \vdash B$$

であるが，$A,\ B$ は任意であるので $A = \neg\bot,\ B = C$

$$\neg\bot \wedge C \vdash C$$

結局，前提 $\bot$ より C が導かれた。C は何でも良かったので定理 A は証明された。□

記号 $\vdash$ ($resp.$ $\dashv$) の代わりに $\Longrightarrow$ ($resp.$ $\Longleftarrow$) を使い，これら同時に成り立つ場合 $\Longleftrightarrow$ も使う事とする。

補題 2　　$A \to B \Longleftrightarrow \neg A \vee B\ or\ (A \to B) \longleftrightarrow \neg A \vee B$

証明 [1] 訳者解説, [2] □

定理 A の第 2 証明

補題 2 を使うと

$A \to A \vee B \Longleftrightarrow A \to (\neg A \to B)$ より $A \vdash \neg A \to B$
これより, Herbrand の演繹メタ定理の逆を使って $A,\ \neg A \vdash B$
即ち, $\bot \vdash B$ (B は任意であった.). □

定理 A の第 3 証明 [4]

$\Gamma \vdash \bot = A \wedge \neg A$ より $\Gamma \to A \wedge \neg A.$ 従って

$$\frac{\underline{\Gamma \to A \wedge \neg A}}{\Gamma,\ \neg B \to A \wedge \neg A = \bot}$$

$$\frac{\neg(\neg B) = B}{B}$$

故に, $\Gamma, \perp = A \wedge \neg A \vdash B$ (B は任意)

従って, $\Gamma, \perp \vdash B$.

これに Herbrand の演繹メタ定理を使って

$\Gamma \vdash \perp \to B$. $\square$

参考文献

[1] Crossley,J.N., Ash,C.J,, Brickhill,C.J., Stillwell,J.C., Williams,N.H.: *What is Mathematical Logic?*, Oxford Univ. Press, 1972.
邦訳：田中尚夫訳・解説『現代数理論理学入門』, 共立全書 553, 共立出版, 1977, (vii+118(訳, 註)+64(解説)+6)pp.

[2] 廣瀬健 Hirose,K., 横田一正 Yokota,K.『ゲーデルの世界』*World of K.Gödel,* 海鳴社 Kaimei-Sha, Tokyo, 1985, (ix+210)pp.

[3] Silver,C.L.: *From Symbolic Logic ... to Mathematical Logic*, Wm.C.Brown Publishers, 1994, (xxi+378)pp.

[4] 吉田夏彦 Yoshida,N. 『論理学』*Mathematical Logic*, 培風館, 1958, Baihoo-kan, Tokyo, 1958, (vi+148)pp.

(received 21 January 2023.)