奇数の完全数に就いて
On Odd Perfect Numbers

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

In this paper we obtain some necessary conditions for the existence of odd perfect numbers.

Key words ; odd perfect number,perfect number,
Mathematics Subject Classification 2020;　11A05,11A99.

自然数 N の 1 と自分自身も含めた約数の総和 $\sigma(N)$ が $2N$ に等しくなる場合の N を完全数 perfect number と云う。例えば $6 = 1 + 2 + 3 = 2 \cdot (2^2 - 1)$, $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 2^2 \cdot (2^3 - 1), \cdots$ は完全数であり，古代ギリシャの昔から知られており，例えば Euclid の『原論』第 IX 巻，命題 36 [9] には「$2^p - 1$ が素数であれば $2^{p-1}(2^p - 1)$ は完全数となる」と書かれている ($2^p - 1$ が素数となるとき $\cdots$ このとき p は必然的に素数となる，この素数 $2^p - 1$ を Mersenne(1588-1647) 型素数と云い，無限個存在するか否かは open problem である。)。
これに対し，Euler は偶数 even number に対して Euclid の『原論』第 IX 巻，命題 36 の記述の逆を証明した。即ち
定理 A([3])

N は偶数の完全数 even perfect number

$$\Longleftrightarrow$$

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1) \text{ and } 2^p - 1 \text{ は素数 prime number}$$

となる。□

Euler は又，奇数の完全数に対して

定理 B([2] [5])

$$N \text{ は奇数の完全数 odd perfect number}$$

$$\Longrightarrow$$

$$N = (4n+1)^{4m+1}E^2 \text{ and}$$
$$4n+1 \text{ は素数 prime}, \ E \text{ は奇数の合成数 odd composite number}$$

となる。□

を得た。奇数の完全数は存在しないと予想されているが，その成否については約二千年強の間今日まで未解決問題 open problem である。

自然数 N の素因数分解を

$$N = q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m}, \ \ q_1 < q_2 < \cdots < q_m \text{は素数}, \ \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m \in \mathbf{N} \cup \{0\}.$$

とするとき，N の 1 と自分自身も含めた約数の総和 $\sigma(N)$ は

$$\begin{aligned}
\sigma(N) &= (1 + q_1 + q_1^2 + \cdots + q_1^{\alpha_1})(1 + q_2 + q_2^2 + \cdots + q_2^{\alpha_2}) \cdots \\
&\quad \cdots (1 + q_m + q_m^2 + \cdots + q_m^{\alpha_m}) \\
&= \frac{q_1^{\alpha_1+1} - 1}{q_1 - 1} \frac{q_2^{\alpha_2+1} - 1}{q_2 - 1} \cdots \frac{q_m^{\alpha_m+1} - 1}{q_m - 1} \\
&= q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} \frac{1 - \frac{1}{q_1^{\alpha_1+1}}}{1 - \frac{1}{q_1}} \cdots \frac{1 - \frac{1}{q_m^{\alpha_m+1}}}{1 - \frac{1}{q_m}} \\
&= N \frac{q_1 - \frac{1}{q_1^{\alpha_1}}}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_m - \frac{1}{q_m^{\alpha_m}}}{q_m - 1}
\end{aligned}$$

であるので，

$$N \text{ は完全数 perfect number}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$2 = \frac{q_1 - \frac{1}{q_1^{\alpha_1}}}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_m - \frac{1}{q_m^{\alpha_m}}}{q_m - 1},$$

$$\Longrightarrow$$

$$2 < \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_m}{q_m - 1} \cdots (1)$$

となる。

N を奇数の完全数で $N=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}$ とすると (1) より

$$2<\frac{q_1}{q_1-1}\frac{q_2}{q_2-1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\frac{q_1}{q_1-1}\frac{q_2}{q_2-1}\leq\max_{q_1<q_2;odd\ prime}\frac{q_1}{q_1-1}\frac{q_2}{q_2-1}=\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{8}<2$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N=q_1^{\alpha_1}q_2^{\alpha_2}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 1 [3] [6]

奇数の完全数 *odd perfect number* は少なくとも *at least* 3 個の相異なる素因数 3 *distinct prime factors* を持つ. □

次に N を奇数の完全数で $3\not|N$, $N=q_1^{\alpha_1}\cdots q_6^{\alpha_6}$ とすると (1) より

$$2<\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_6}{q_6-1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_6}{q_6-1}\leq\max_{q_1<\cdots<q_6;odd\ prime}\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_6}{q_6-1}=$$
$$=\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}=\frac{1616615}{829440}<2$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N=q_1^{\alpha_1}\cdots q_6^{\alpha_6}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 2 [3] [6]

奇数の完全数 *odd perfect number* で 3 の倍数でないものは少なくとも *at least* 7 個の相異なる素因数 7 *distinct prime factors* を持つ. □

次に N を奇数の完全数で $5\not|N$, $N=q_1^{\alpha_1}\cdots q_3^{\alpha_3}$ とすると (1) より

$$2<\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_3}{q_3-1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_3}{q_3-1}\leq\max_{q_1<\cdots<q_3;odd\ prime}\frac{q_1}{q_1-1}\cdots\frac{q_3}{q_3-1}=$$
$$=\frac{3}{2}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}=\frac{77}{40}<2$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N=q_1^{\alpha_1}\cdots q_3^{\alpha_3}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 3　奇数の完全数 *odd perfect number* で５の倍数でないものは少なくとも *at least* 4 個の相異なる素因数 4 *distinct prime factors* を持つ. □

次に N を奇数の完全数で $3 \cdot 5 = 15 \not| N$, $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{14}^{\alpha_{14}}$ とすると (1) より

$$2 < \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{14}}{q_{14} - 1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\begin{aligned}
&\frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{14}}{q_{14} - 1} \leq \max_{q_1 < \cdots < q_{14}; odd\ prime} \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{14}}{q_{14} - 1} = \\
&= \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \frac{13}{12} \frac{17}{16} \frac{19}{18} \frac{23}{22} \frac{29}{28} \frac{31}{30} \frac{37}{36} \frac{41}{40} \frac{43}{42} \frac{47}{46} \frac{53}{52} \frac{59}{58} \\
&= 1.99331531 \cdots < 2
\end{aligned}$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{14}^{\alpha_{14}}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 4　[6]
奇数の完全数 *odd perfect number* で $3 \cdot 5 = 15$ の倍数でないものは少なくとも *at least* 15 個の相異なる素因数 15 *distinct prime factors* を持つ. □

次に N を奇数の完全数で $3 \cdot 7 = 21 \not| N$, $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{10}^{\alpha_{10}}$ とすると (1) より

$$2 < \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{10}}{q_{10} - 1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\begin{aligned}
&\frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{10}}{q_{10} - 1} \leq \max_{q_1 < \cdots < q_{10}; odd\ prime} \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{10}}{q_{10} - 1} = \\
&= \frac{5}{4} \cdot \frac{11}{10} \frac{13}{12} \frac{17}{16} \frac{19}{18} \frac{23}{22} \frac{29}{28} \frac{31}{30} \frac{37}{36} \frac{41}{40} \\
&= 1.96917126 \cdots < 2
\end{aligned}$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{10}^{\alpha_{10}}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 5　奇数の完全数 *odd perfect number* で $3 \cdot 7 = 21$ の倍数でないものは少なくとも *at least* 11 個の相異なる素因数 11 *distinct prime factors* を持つ. □

次に N を奇数の完全数で $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \nmid N$, $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{26}^{\alpha_{26}}$ とすると (1) より

$$2 < \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{26}}{q_{26} - 1}$$

が成り立つはずであるが,

$$\begin{aligned}
&\frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{26}}{q_{26} - 1} \le \max_{q_1 < \cdots < q_{26}; odd\ prime} \frac{q_1}{q_1 - 1} \cdots \frac{q_{26}}{q_{26} - 1} = \\
&= \frac{11}{10}\frac{13}{12}\frac{17}{16} \cdots \frac{113}{112} \\
&= 1.991962079155 \cdots < 2
\end{aligned}$$

となり，これは (1) と矛盾するので $N = q_1^{\alpha_1} \cdots q_{26}^{\alpha_{26}}$ と云う形の奇数の完全数は存在しない。従って

定理 6　[6]
奇数の完全数 *odd perfect number* で $3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$ の倍数でないものは少なくとも *at least* 27 個の相異なる素因数 27 *distinct prime factors* を持つ.
□

ところが，次が云えるのである:
定理 C [3]$\cdots$ ここに証明はない.

$$\begin{aligned}
&\qquad N \text{ は奇数の完全数 odd perfect number} \\
&\Longrightarrow \\
&\qquad 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 \nmid N
\end{aligned}$$

証明　帰謬法で示す：$3 \cdot 5 \cdot 7 = 105 | N$ として

$$N = 3^{2\alpha} 5^{\beta} 7^{2\gamma} q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} \quad (7 < q_1 < \cdots < q_m)$$

とする (定理 B より $3 \equiv 7 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 4)$ であるから $3, 7$ の冪 power は偶数 even である.) と

$$\begin{aligned}
2 = &\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{\beta}}\right) \times \\
&\times \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2} + \cdots + \frac{1}{7^{2\gamma}}\right) \times \\
&\times \left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \cdots + \frac{1}{q_1^{\alpha_1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{q_m^2} + \cdots + \frac{1}{q_m^{\alpha_m}}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&> \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{7}+\frac{1}{7^2}\right) \\
&= \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{57}{49} = \frac{4446}{2205} > 2
\end{aligned}
$$

となり矛盾する。従って $3\cdot 5\cdot 7 = 105 \not| N$. □

以下, p は素数 prime を表わすとし，$\pi(x) := \sharp\{p \leq x \,;\, p \text{ は素数}\}$，即ち $\pi(x)$ は x 以下の素数の個数とする。

補題 1 (**Mertens の定理**)(1874, [8], [10],p.63.)

$$
\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) \;=\; \frac{e^{-\gamma_0}}{\log x}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \quad (x \geq 2),
$$

$$
\gamma_0 = 0.57721566\cdots \text{ は Euler の定数.} \quad \square
$$

定理 7 $x_0 \geq 7$ を与えられた実数として, 奇数の完全数 *odd perfect number* N で

$$
\prod_{p\leq x_0} p
$$

の倍数でないものは少なくとも *at least*

$$
\pi(x_0^2) - \pi(x_0)
$$

個の相異なる素因数 *distinct prime factors* を持つ. □

注意　定理 C を考慮して $x_0 \geq 7$ とした。

証明 $\prod_{p\leq x_0} p \not| N$ で，N は相異なる $\pi(y)-\pi(x_0)$ 個の素因数

$$
q_1 < q_2 < \cdots < q_{\pi(y)-\pi(x_0)}
$$

を持つとすると (1) より,

$$
2 < \prod_{i=1}^{\pi(y)-\pi(x_0)} \frac{q_i}{q_i-1}
$$

を満たさねばならない。

$$
\max_{q_1<\cdots<q_{\pi(y)-\pi(x_0)}} \prod_{i=1}^{\pi(y)-\pi(x_0)} \frac{q_i}{q_i-1} = \frac{\prod_{p\leq y}\frac{p}{p-1}}{\prod_{p\leq x_0}\frac{p}{p-1}}
$$

であるから

$$\frac{\prod_{p\le y}\frac{p}{p-1}}{\prod_{p\le x_0}\frac{p}{p-1}}\ge 2$$

となる y の最小値を下から評価する estimate y from the bottom。
補題 1 より

$$\frac{\prod_{p\le y}\frac{p}{p-1}}{\prod_{p\le x_0}\frac{p}{p-1}}=\frac{\log y}{\log x_0}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)}{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log y}\right)}\ge 2$$

$$\iff$$

$$\log y\ge 2\log x_0\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log y}\right)}{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)}$$

$$\Longleftarrow$$

$$\log y\ge 2\log x_0$$

$$\iff$$

$$y\ge x_0^2$$

となるので定理は証明された。□
注意 $x_0\ge 7$ であるが，定理 1, 2, 4, 6 で，この条件が満たされているか否かを確かめてみる：
定理 1 $x_0=2$ であるから，$\pi(x_0^2)-\pi(x_0)=\pi(4)-\pi(2)=2-1=1<3$ で満たされている。
定理 2 $x_0=3$ であるから，$\pi(x_0^2)-\pi(x_0)=\pi(9)-\pi(3)=4-2=2<7$ で満たされている。
定理 4 $x_0=5$ であるから，$\pi(x_0^2)-\pi(x_0)=\pi(25)-\pi(5)=9-3=6<15$ で満たされている。
定理 6 $x_0=7$ であるから，$\pi(x_0^2)-\pi(x_0)=\pi(49)-\pi(7)=15-4=11<27$ で満たされている。

- **定理 8**

N は奇数の完全数 odd perfect number

$$\Longrightarrow$$

$$3\cdot 5\cdot 11\cdot 13=2145\not| N$$

証明　帰謬法で示す：$3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145 | N$ として

$$N = 3^{2\alpha} 5^{\beta} 11^{2\gamma} 13^{\delta} q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \cdots q_m^{\alpha_m} \quad (13 < q_1 < \cdots < q_m)$$

とする (定理Bより $3 \equiv 11 \equiv 3 (\bmod 4)$ であるから $3, 11$ の冪 power は偶数 even である.) と

$$\begin{aligned}
2 &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^{2\alpha}}\right)\left(1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \cdots + \frac{1}{5^{\beta}}\right) \times \\
&\times \left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2} + \cdots + \frac{1}{11^{2\gamma}}\right)\left(1 + \frac{1}{13} + \frac{1}{13^2} + \cdots + \frac{1}{13^{\delta}}\right) \times \\
&\times \left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \cdots + \frac{1}{q_1^{\alpha_1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{q_m^2} + \cdots + \frac{1}{q_m^{\alpha_m}}\right) \\
&> \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2}\right)\left(1 + \frac{1}{5}\right)\left(1 + \frac{1}{11} + \frac{1}{11^2}\right)\left(1 + \frac{1}{13}\right) \\
&= \frac{13}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{133}{121} \cdot \frac{14}{13} = 2.0517906336 \cdots > 2
\end{aligned}$$

となり矛盾する。従って $3 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13 = 2145 \not| N$.　□

補題 2 (**Mertensの定理**)(1874, [4],p.31.)

$$\begin{aligned}
\prod_{p \leq x} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2} \log x \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) \\
&= (1.082762193260 \cdots) \log x \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)
\end{aligned}$$

$(x \geq 2)$,　$\gamma_0 = 0.57721566 \cdots$ は Euler の定数,

ここでの O constant は 1 未満.　□

定理 9

N は奇数の完全数 odd perfect number

$\Longrightarrow$

$Q \not| N$　*where*

(i)　$Q = \dfrac{1}{3} \displaystyle\prod_{2 < p \leq x_0} p$,　$x_0 \geq 255$,

or　(ii)　$Q = \dfrac{1}{5} \displaystyle\prod_{2 < p \leq x_0} p$,　$x_0 \geq 146$,

$$\text{or} \quad \text{(iii)} \quad Q = \frac{1}{7} \prod_{2<p\leq x_0} p, \quad x_0 \geq 115,$$

$$\text{or} \quad \text{(iv)} \quad Q = \frac{1}{3\cdot 5} \prod_{2<p\leq x_0} p, \quad x_0 \geq 772,$$

$$\text{or} \quad \text{(v)} \quad Q = \frac{1}{3\cdot 7} \prod_{2<p\leq x_0} p, \quad x_0 \geq 562,$$

$$\text{or} \quad \text{(vi)} \quad Q = \frac{1}{5\cdot 7} \prod_{2<p\leq x_0} p, \quad x_0 \geq 298.$$

証明　帰謬法で示す：
(i) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\leq x_0 \\ p\neq 3}} p | N$$

と仮定すると

$$N = \prod_{\substack{2<p\leq x_0 \\ p\neq 3}} p^{\alpha_p} \cdot q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m} \text{と素因数分解され,}$$

$$2 = \prod_{\substack{2<p\leq x_0 \\ p\neq 3}} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha_p}}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \cdots + \frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{q_m^2} + \cdots + \frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$は素数$prime$. $(2 < p \neq 3 \leq x_0)$

$$> \frac{3}{4} \prod_{2<p\leq x_0} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \prod_{p\leq x_0} \left(1 + \frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2} \log x_0 \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} (1.082762193260\cdots) \log x_0 \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{3}{4} \cdot (0.721841462173\cdots) \log x_0 \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が 2 以上になるには

$$\frac{3}{4} (0.721841462173\cdots) \log x_0 \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right) > 2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{3}{4}(0.721841462173\cdots)\log x_0 > 3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\log x_0 > \frac{3\cdot\frac{4}{3}}{0.721841462173\cdots} = 5.54138299005\cdots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_0 > \exp(5.54138299005\cdots) = 255.0304602670\cdots$$

(ii) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5}} p|N$$

と仮定すると

$$N = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5}} p^{\alpha_p}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m}\text{と素因数分解され,}$$

$$2 = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}+\cdots+\frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{q_m^2}+\cdots+\frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p<q_1<q_2<\cdots<q_m$ は素数 $prime.$ $(2<p\ne 5\le x_0)$

$$> \frac{5}{6}\prod_{2<p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\prod_{p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2}\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}(1.082762193260\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{5}{6}\cdot(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が２以上になるには

$$\frac{5}{6}(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right) > 2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{5}{6}(0.721841462173\cdots)\log x_0 > 3$$

$$\iff$$

$$\log x_0 > \frac{3\cdot\frac{6}{5}}{0.721841462173\cdots} = 4.987244691047\cdots$$

$$\iff$$

$$x_0 > \exp(2.598629838228\cdots) = 146.532125491268\cdots$$

(iii) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 7}} p | N$$

と仮定すると

$$N = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 7}} p^{\alpha_p}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m}\text{と素因数分解され,}$$

$$2 = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 7}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}+\cdots+\frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{q_m^2}+\cdots+\frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$は素数$prime.$ $(2 < p \ne 7 \le x_0)$

$$> \frac{7}{8}\prod_{2<p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\prod_{p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2}\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{7}{8}(1.082762193260\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$= \frac{7}{8}\cdot(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が 2 以上になるには

$$\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right) > 2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0 > 3$$

$$\iff$$

$$\log x_0 > \frac{3\cdot\frac{8}{7}}{0.721841462173\cdots} = 4.749933466786\cdots$$

$$\iff$$

$$x_0 > \exp(4.749933466786\cdots) = 115.576594589171\cdots$$

(iv) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,5}} p|N$$

と仮定すると

$$N = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,5}} p^{\alpha_p}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m} \text{と素因数分解され,}$$

$$2 = \prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,5}} \left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}+\cdots+\frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{q_m^2}+\cdots+\frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$$p<q_1<q_2<\cdots<q_m \text{は素数}\,prime.\ (2<p\ne 3,5\le x_0)$$

$$>\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\prod_{2<p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\prod_{p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2}\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(1.082762193260\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が２以上になるには

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)>2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}(0.721841462173\cdots)\log x_0>3$$

$$\iff$$

$$\log x_0>\frac{3\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}}{0.721841462173\cdots}=6.649659588062\cdots$$

$$\iff$$

$$x_0>\exp(6.649659588062\cdots)=772.521305296053\cdots$$

(v) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,7}} p|N$$

と仮定すると

$$N=\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,7}} p^{\alpha_p}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m}\text{と素因数分解され,}$$

$$2=\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 3,7}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}+\cdots+\frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{q_m^2}+\cdots+\frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p<q_1<q_2<\cdots<q_m$は素数 $prime.$ $(2<p\ne 3,7\le x_0)$

$$>\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\prod_{2<p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\prod_{p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2}\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}(1.082762193260\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}\cdot(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が 2 以上になるには

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)>2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{3}{4}\cdot\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0>3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\log x_0>\frac{3\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{8}{7}}{0.721841462173\cdots}=6.333009131487\cdots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_0>\exp(6.333009131487\cdots)=562.847730979942\cdots$$

(vi) の場合

$$\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5,7}} p|N$$

と仮定すると

$$N=\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5,7}} p^{\alpha_p}\cdot q_1^{\beta_1}\cdots q_m^{\beta_m}$$ と素因数分解され，

$$2=\prod_{\substack{2<p\le x_0\\ p\ne 5,7}}\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^{\alpha_p}}\right)\times$$

$$\times\left(1+\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_1^2}+\cdots+\frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{q_m}+\frac{1}{q_m^2}+\cdots+\frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p<q_1<q_2<\cdots<q_m$ は素数 $prime.$ $(2<p\ne 5,7\le x_0)$

$$>\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\prod_{2<p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\prod_{p\le x_0}\left(1+\frac{1}{p}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{6e^{\gamma_0}}{\pi^2}\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(1.082762193260\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

$$=\frac{5}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が２以上になるには

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)>2$$

$$\Longleftarrow$$

$$\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}(0.721841462173\cdots)\log x_0>3$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\log x_0>\frac{3\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}}{0.721841462173\cdots}=5.699708218338\cdots$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_0>\exp(5.699708218338\cdots)=298.780209661375\cdots$$

これで各場合，矛盾が生じたので定理は証明された。□

定理 10

$x_0\ge 3$ を与えると，次の $y>x_0^3$ が存在する：

N は奇数の完全数 odd perfect number

$\Longrightarrow$

$$Q \not| N \quad where\ Q := \frac{\prod_{p \le y} p}{\prod_{p \le x_0} p}. \quad \square$$

証明 帰謬法で示す：

$Q := \dfrac{\prod_{p \le y} p}{\prod_{p \le x_0} p} | N$ と仮定すると

$N = \displaystyle\prod_{x_0 < p \le y} p^{\alpha_p} \cdot q_1^{\beta_1} \cdots q_m^{\beta_m}$ と素因数分解され,

$$2 = \prod_{x_0 < p \le y} \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{\alpha_p}}\right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1^2} + \cdots + \frac{1}{q_1^{\beta_1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{q_m} + \frac{1}{q_m^2} + \cdots + \frac{1}{q_m^{\beta_m}}\right)$$

$p < q_1 < q_2 < \cdots < q_m$ は素数 $prime.$ $(x_0 < p \le y)$

$$> \prod_{x_0 < p \le y} \left(1 + \frac{1}{p}\right) = \frac{\prod_{p \le y}\left(1 + \frac{1}{p}\right)}{\prod_{p \le x_0}\left(1 + \frac{1}{p}\right)}$$

$$= \frac{\log y}{\log x_0} \cdot \frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log y}\right)}{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)} \quad \text{(補題 2 による)}$$

$$= \frac{\log y}{\log x_0} \cdot \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right)$$

この右辺が 2 以上になるには

$$\frac{\log y}{\log x_0} \cdot \left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x_0}\right)\right) > 2$$

$\Longleftarrow$

$$\frac{\log y}{\log x_0} > 3$$

$\Longleftrightarrow$

$$\log y > 3 \log x_0 = \log(x_0^3)$$

$\Longleftrightarrow$

$$y > x_0^3$$

これで矛盾が生じたので定理は証明された。$\square$

参考文献

[1] Cook,R.: Factors of odd perfect numbers, in *Number Theory,* Proceedings of the 4th Conference of Canadian Number Theory association, July 2-8, 1994, at Dalhousie Univ., Halifax, Nova Scotia, Canada, **15**(1995), 123-131, edi. by Dicher,K., (xxiv+431)pp.

[2] Dickson,L.,E.: *History of the Theory of Numbers,*, I, II, III, Univ. Chicago Press, 1929, Chelsea reprint version,1952.

[3] Dunham,W.: *Euler The Master of Us All*, Math. Assoc. of Amer., Washington D.C., 1999.
邦訳：黒川信重・若山正人・百々谷哲也訳『オイラー入門』シュプリンガーフェアラーク東京，2004，(xiv+254)pp.

[4] Williams and Fern Ellison: *Prime Numbers,* Wiley Interscience Publication, New York, Hermann, Paris, 1985, (xii+417)pp., translated from *Les nombres premiers,* Hermann, Paris, 1975.

[5] 中嶋眞澄 Nakajima,M.：奇数の完全数について On Odd Perfect Numbers，潮 USHIO *Tide*, 第 12 巻，vol.**12**, 1966 年 3 月 March, 1966, 東京学芸大学附属竹早中学校 Takehaya Junior High School of Tokyo Gakugei University.

[6] 中嶋眞澄 Nakajima,M.：奇数の完全数について On Odd Perfect Numbers，潮 USHIO *Tide*, 第 13 巻，vol.**13**, 1967 年 3 月 March, 1967, 74-79, 東京学芸大学附属竹早中学校 Takehaya Junior High School of Tokyo Gakugei University.

[7] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 奇数の完全数について On Odd Perfect Numbers, 辛夷 Kobushi *Magnolia Kobus*, 第 8 巻, vol.**8**, 1970 年 3 月 March, 1970, 55-66, 東京学芸大学附属高等学校 Sinior High School of Tokyo Gakugei University.

[8] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014, 2012, (xiv+257)pp.『素数定理の進展・下』及び訳者による補遺，丸善出版，2013, (ix+272)pp.)

[9] 中村幸四郎 Nakamura,K., 寺坂英孝 Terasaka,H., 伊東俊太郎 Itoh,Sh., 池田美恵 Ikeda,M. 訳・解説『ユークリッド原論』*Elements by Euclid*, 共立出版 Kyouritu-Syuppan, 1971, (iii+560)pp.

[10] 内山三郎 Uchiyama,S.:『素数の分布』宝文館, 1970. *The Distribution of Prime Numbers* (in Japanese), HoubunKan-Shuppan, Tokyo, 1970, (iii+230)pp.

(received 21 January 2023.)