素数分布とVolterra型第2種積分方程式[II]
The Distribution of Prime Numbers and Volterra's Integral Equation of Second Kind [II]

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

In this second paper, with some refinement we obtain relations between the distribution of prime numbers and Mertens' asymtotic formula on the sum of reciprocals of prime numbers:

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}$$

, using Volterra's integral equation of second kind.

Key words ; the distribution of prime numbers,Mertens's formula, the prime number theorem, Volterra's integral equation of second kind.
Mathematics Subject Classification 2020;　11N05,45D05.

以下, p は素数を表わすとする。
$\pi(x) := \sharp\{p \le x\ ;\ p$ は素数 $\}$, 即ち $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数を表わす

として，

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+B+R(x),$$
$$\pi(x)=\int_{2-0}^{x}\frac{dt}{\log t}+E(x)=\int_{2-0}^{x}\frac{dt}{\log t}+xF(x),$$

で残余項 $R(x)$，$E(x)$，$F(x)$ を定義する。
Riemann 予想 Riemann Hypothesis は

$$E(x)=\mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}}\log x)$$

と同値となる事 (H. von Koch, 1901) [2], 更に

$$E(x)\neq o(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\log x})\ \text{(E.Schmidt,1903)},$$
$$E(x)\neq o(\frac{x^{\frac{1}{2}}\log\log\log x}{\log x})\ \text{(J.E.Littlewood,1914)},$$

となる事 [2] が知られている。また，$E(x)$ に関する現在知られている最良の評価は 1958 年独立に N.M. Korobov, I.M. Vinogradov によって得られた

$$E(x)=\mathrm{O}(x\exp\{-c\log^{\frac{3}{5}}x(\log\log x)^{-\frac{1}{5}}\})$$
$$\textit{with some positive constant}: c$$

である [2]。

これらの事実を踏まえて $R(x)$，$F(x)$ を $x^{-\alpha}\log^{\beta}x$ の形で評価する。
前論文 [1] では
定理 A([1] 定理 1)

$$R(x)=\mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^{\alpha}}\right)\quad(\alpha\ge 1)$$
$$\Longrightarrow$$
$$E(x)=\mathrm{O}\left(\frac{x}{(\log x)^{\alpha}}\right)$$

となる。□

定理 B([1] 定理 2)

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} E(x) &= \mathrm{O}\left(\frac{x}{(\log x)^{\beta}}\right) \quad (\beta > 1) \\ R(x) &= \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^{\beta-1}}\right) \end{aligned}$$

となる。□

を得たが，今回は次の定理を証明する。

定理 1

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} R(x) &= \mathrm{O}\left(x^{-\alpha} \log^{\beta} x\right) \quad (0 < \alpha < 1,\ \beta \in \mathbf{R}) \\ F(x) &= \mathrm{O}\left(x^{-\alpha} \log^{\beta} x\right) \end{aligned}$$

となる。□

定理 2

$$\Longrightarrow \quad \begin{aligned} F(x) &= \mathrm{O}\left(x^{-\alpha} \log^{\beta} x\right) \quad (0 < \alpha < 1,\ \beta \in \mathbf{R}) \\ R(x) &= \mathrm{O}\left(x^{-\alpha} \log^{\beta} x\right) \end{aligned}$$

となる。□

予想

$$|F(x)| \asymp |R(x)|$$

となる。□

補題 1

$$\frac{1}{x}\int_2^x t^{-\alpha} \log^{\beta} t dt \asymp x^{-\alpha} \log^{\beta} x \quad (0 < \alpha < 1,\ \beta \in \mathbf{R}). \qquad \square$$

註　$f(x)$ が減少関数であっても，急減少関数 $f(x)$ に対しては

$$\frac{1}{x}\int_2^\infty f(t)dt \ll f(x)$$

は成り立たない：$f(x)=e^{-x}$ とすると

$$\frac{1}{x}\int_2^\infty e^{-t}dt \asymp \frac{1}{x} \neq \mathrm{O}(e^{-x})$$

証明　部分積分を用いる。

$$\frac{1}{x}\int_2^x t^{-\alpha}\log^\beta t dt = \frac{1}{x}\int_2^x \left(\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)' \log^\beta t dt =$$

$$= \frac{1}{x}\left\{\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\log^\beta x - \frac{2^{1-\alpha}}{1-\alpha}\log^\beta 2 - \frac{\beta}{1-\alpha}\int_2^x t^{-\alpha}(\log t)^{\beta-1}dt\right\} \asymp$$

$$\asymp x^{-\alpha}\log^\beta x$$

□

補題 2

$$\begin{aligned} F(x) &= R(x) - \frac{1}{x}\int_{2-0}^x R(t)dt + \frac{2}{x}B' \\ &= R(x) - \frac{1}{x}\int_{2-0}^x R(t)dt + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right). \qquad \square \end{aligned}$$

証明 [1],p.194,(5) を $F(x)$ について解いた式を参照□

補題 3

$$R(x) = F(x) - \int_x^\infty \frac{F(t)}{t}dt. \qquad \square$$

証明 [1],p.195,(7) を参照□

定理 1 の証明
補題 2 に補題 1 を使って

$$
\begin{aligned}
F(x) &= R(x) - \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x} R(t)dt + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x + \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x} t^{-\alpha}\log^{\beta} t dt + \frac{1}{x} \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x + x^{-\alpha}\log^{\beta} x \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x. \qquad \square
\end{aligned}
$$

定理 2 の証明
補題 3 に補題 1 を使って

$$
\begin{aligned}
R(x) &= F(x) - \int_{x}^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x + \int_{x}^{\infty} \frac{t^{-\alpha}\log^{\beta} t}{t} dt \\
&= x^{-\alpha}\log^{\beta} x + \int_{x}^{\infty} \left(\frac{t^{-\alpha}}{-\alpha}\right)' \log^{\beta} t dt \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x + x^{-\alpha}\log^{\beta} x + \frac{\beta}{\alpha}\int_{x}^{\infty} \frac{t^{-\alpha}\log^{\beta-1} t}{t} dt \\
&\ll x^{-\alpha}\log^{\beta} x. \qquad \square
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 素数分布と Volterra 型第 2 種積分方程式 The Distribution of Prime Numbers and Volterra's Integral Equation of Second Kind, 鹿児島経済論集，第 63 巻 3 号, 2022 年 12 月, 187-197, *The Kagoshima Journal of Economics*, **63**, December 2022, 187-197.

[2] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014, 2012,『素数定理の進展・下』及び訳者による補遺，丸善出版，2013)

(received 21 January 2023.)