Riemann予想の証明に就いて[IV]
On a Proof of the Riemann Hypothesis[IV]

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp, nakajimariemann@docomo.ne.jp

概要

Abstract

We also study here another proof of the Riemann Hypothesis without using the integral with respect to t in author's previous work [15] [16]. Moreover we add the reason(proof) why we use the Cauchy-Schwarz-Bunyakowski inequality instead of Hölder's inequality and very exact representation of Main Theorem 1 [17].And in this new paper we introduce α_ν with α and continue to proceed our arguments and correct mistakes and mistypings in [17]([15] [16]).

Key words ; the zeros of the Riemann Zeta-function, the Riemann hypothesis.

Mathematics Subject Classification 2020;　11M06, 11M26.

$\zeta(s), (s = \sigma + it \in \mathbf{C})$ を Riemann の zeta 関数とする。又, $\rho = \beta + i\gamma$ で $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero を表わすことにする。
又, $\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。

前論文 [15] での t についての積分をすることなく証明が出来る事が判明した ($t = \gamma_0$ と固定する.) [16]。従って前論文 [15] の補題 Lemma1,3 は不要となり, その代わりに Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使い主定理 Main Theorem 1 の証明は簡潔になる事を以下に述べた [16]。
前回は以上に加え主定理 Main Theorem 1 をより正確に述べ補足し, **注 2** として

Hölder の不等式でなく Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使う理由を説明，証明した [17]。しかし今回，この論文では，後半で α に加え α_ν を定義導入し展開し，上記**注 2** としての説明として Hölder の不等式と Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の使い分けを説明, 証明して**注 2** を変更した。

記号 $\mathrm{O}(\cdot)$ は Bachmann-Landau のラージ・オウ記号と云われ次を意味する：

$$
\begin{aligned}
&as\ x \to some\ \gamma\ or\ \ \pm\infty,\ or\ for\ \forall x \in some\ A,\\
f(x) = \mathrm{O}(g(x)) &\Longleftrightarrow constant:\ {}^{\exists}C > 0\ with\ |f(x)| \le Cg(x)
\end{aligned}
$$

定数 C が parameter:$\alpha, \beta, \cdots$ に依存する場合:$C = C_{\alpha,\beta,\cdots}$ は

$$f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x))$$

と書くが $\alpha, \beta, \cdots$ を省略して書く場合もある。
記号 $\ll$ は Vinogradov の意味:

$$
\begin{aligned}
f(x) \ll g(x) &\Longleftrightarrow f(x) = \mathrm{O}(g(x)),\\
f(x) \ll_{\alpha,\beta,\cdots} g(x) &\Longleftrightarrow f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x))
\end{aligned}
$$

か，または十分大きいと云う意味 ($a \ll b$ は b が a に比べて十分大きい sufficiently large を意味する) の 2 通りに使うが混乱 confusion は起きないと考える。

$12 \ll m \in \mathbf{N}$ を一つ固定し，$C_m = m$ (or $m + \frac{1}{2}$) とする。
また，$s = \sigma + it$ ($\frac{1}{2} < \sigma < 1,\ C_{m-1} < t < C_m$) も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。$\mathbf{N} \ni \nu \gg 1$ は十分大きい自然数とする。
$\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero: $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ を，

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \zeta(\rho) = 0,\ C_{m-1} < \gamma < C_m\}$$

で定義する。($\rho_0,\ \beta_0,\ \gamma_0$ は m に依存するから，$\rho_{0,m},\ \beta_{0,m},\ \gamma_{0,m}$ と本来書くべきだが煩わしくなるので，このように書いても誤解は生じないはずである。) 従って，領域 $\{w = u + iv \mid \beta_0 < u,\ C_{m-1} < v < C_m\}$ は $\zeta(s)$ の非零領域 zero free region となる。
$\rho_+,\ \rho_-,\ \beta_+ > \frac{1}{2},\ \beta_- > \frac{1}{2},\ \gamma_+,\ \gamma_-,\ U_m^+,\ U_m^-,\ U_m,\ V_m^+,\ V_m^- > 0$
を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
\rho_+ \ \ :=\ \ & \beta_+ + i\gamma_+,\ \zeta(\rho_+) = 0\\
& \gamma_+ := \min\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma_0 < \gamma\}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\rho_- &:= \beta_- + i\gamma_-,\ \zeta(\rho_-) = 0\\
&\quad \gamma_- := \max\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma < \gamma_0\}\\
U_m^+ &:= \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0),\ C_m\}\\
U_m^- &:= \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-),\ C_{m-1}\}\\
U_m &:= \frac{1}{2}\min\{|U_m^+ - \gamma_0|,\ |U_m^- - \gamma_0|, \frac{1}{2}\}\\
V_m^+ &:= \gamma_0 + U_m\\
V_m^- &:= \gamma_0 - U_m
\end{aligned}
$$

ρ_0 の左側：$\Im\rho = \gamma_0,\ \zeta(\rho) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0,\ \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \cdots$$

$$(\frac{1}{2} < \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0,\ \zeta(\rho_i) = 0,\ \Im\rho_i = \gamma_0,\ i = 1, 2, \cdots)$$

とする ($\rho_1,\ \rho_2, \cdots$ が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする。)。
注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u,\ \gamma_- < v < \gamma_+,\ v \neq \gamma_0\}$ は非零領域 zero free region である。

$s = \sigma + i\gamma_0,\ Y > 1, \delta > 1$ とする。$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選ぶ。
これより,

$$s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0) + i(\gamma_0 - \gamma_0) = \sigma - \beta_0\ ,$$

$0 < \sigma - \beta_0 \ll \dfrac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選んだから

$$\frac{|\rho - s|}{|\rho_0 - s|} > 2 \quad (\rho \neq \rho_0)\ \ for\ \ \forall\rho = \beta + i\gamma \quad \cdots(**)$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero)
である。

このとき，次の定理が成り立つ：

主定理 1

十分大きい $\delta > 1, Y > 1$ を適切に取り固定する。これに対して

For large fixed $\delta > 1$ *and* $Y > 1$ *which are properly chosen,*

$$0 < (\sigma - \beta_0) < \min\left\{\frac{\sigma - \frac{1}{2}}{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}, \frac{\sigma}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}, \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}\right\}$$

$\cdots(*)$,

となるようにσを選ぶ (これは明らかに可能である。) と,

$$\frac{1}{(\sigma-\beta_0)} \leq \max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となる。
従って，この結論は定理の仮定 $(*)$ と矛盾する。
ここで $\sigma \to \beta_0$ とすれば，上記左辺は $+\infty$ の発散し右辺は

$$\max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{\beta_0-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{\beta_0}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

と有限値となり矛盾を引き起こす。
結局 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma$ with $\beta_0 > \frac{1}{2}$ は，もはや $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero とは成り得ない。□

注

$$0 < a, b, c \text{ に対して，} \quad \frac{1}{\min\{a,b,c\}} = \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}.$$

上記**主定理１**を何回 (有限回) か繰り返し使い $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation を使えば

主定理 2 $\zeta(s)$ の全ての複素零点 complex zero $\rho = \beta + i\gamma$ は,

$$\beta = \frac{1}{2}$$

を満たす。□

が得られる。

主定理１を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1　$\sigma > 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots$ とする。
$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}$$

$m = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \quad &< \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m \left\{\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\} \\ &\ll \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} \quad (\text{as } m \to \infty\ )\end{aligned}$$

が成立する。

証明 先ず $m = 1, 2, \cdots$ のときを考える。
$f(y) := y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y) = y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m - \sigma \log y\}$ であるから，$f'(y_0) = 0$ となるのは，$y_0 = \exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \quad &= \quad \sum_{n=2}^{[y_0]-1} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} + \sum_{n=[y_0]+1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \\ &< \quad \int_2^{[y_0]} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} + \int_{[y_0]}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx \\ &< \quad \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\ &= \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\ &\leq \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma} \\ &= \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m \\ &\leq \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + m! \frac{1}{e}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^m \\ &= \quad m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m \left\{\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}\end{aligned}$$

但し，$[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又,

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq \frac{m!}{e}$$

を使った。
$m=0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}<1+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{\sigma}}dx=1+\frac{1}{\sigma-1}$$

となり，補題は証明された。□

補題 2　a_i, $c_i=c_i(\nu)\in\mathbf{C}$, $f_i(\nu)\to 0\ as\ \nu\to\infty$, $(i=0,1,\cdots,n)$ とする。又，$|a_0|>|a_i|\ (i=1,2,\cdots,n)$, $|c_i|^{1/\nu}\to 1\ (i=0,1,2,\cdots,n)\ as\ \nu\to\infty$, $c_0\neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu\to\infty}|\sum_{i=0}^{n}c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^{\nu}a_i^{\nu}|^{1/\nu}=\max_{0\leq i\leq n}|a_i|=|a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\cdots,n}|a_i/a_0|=:1/r\ (r>1)$ とおく。

$$\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\to 1,\ |c_i|^{1/\nu}\to 1\ as\ \nu\to\infty,\ (i=1,2,\cdots,n)$$

また，n が有限 finite であるので, $\forall\epsilon>0$ に対して $\exists\nu_0$ が存在して,

$$\left|\frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}}\cdot\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right|<1+\epsilon\ \ (i=1,2,\cdots,n)\ for\ \forall\nu>\nu_0$$

となるが，ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1+\epsilon}{r}=:\frac{1}{R}<1$$

とする。

$$\begin{aligned}
&|\sum_{i=0}^{n}c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^{\nu}a_i^{\nu}|^{1/\nu}\\
=\ &|c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_0}\left(\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right)^{\nu}\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^{\nu}\right|^{1/\nu}\\
=\ &|c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{O}\left(\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^{\nu}\right)\right|^{1/\nu}\\
=\ &|c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right|^{1/\nu}\\
=\ &|c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right\}^{R^{\nu}\cdot\frac{1}{\nu R^{\nu}}}\right|\\
\to\ &|a_0|\ \ (as\ \nu\to\infty)
\end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 3 [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [12], [18], [21]

(0) $$\frac{1}{\Gamma(s+1)}=\frac{1}{s\Gamma(s)}=e^{\gamma_0 s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

(1) $$\log\Gamma(s+1)=-\left[\gamma_0 s+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{s}{(-n)}\right)+\frac{s}{(-n)}\right\}\right],$$

(2) $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1)=:\psi(s+1)=\psi(s)+\frac{1}{s}=$$
$$=-\left[\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right]$$
$$=\log(s+1)-\frac{1}{2(s+1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right),$$
$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\psi(s)^{(\nu)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+n)^{\nu+1}}\quad(\nu=1,2,\cdots),$$

(3) $$\zeta(s)=\frac{1}{2(s-1)}e^{(\log 2\pi-1)s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\prod_{q=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-2q}\right)e^{-\frac{s}{2q}},$$

この対数を取り

(4) $$\log\zeta(s)=\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)s-\log(s-1)-$$
$$-\log 2-\log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)+\sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right]=$$
$$=(\log 2\pi)s-\log 2-s-\log(s-1)+$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{s}{(-2q)}\right)+\frac{s}{(-2q)}\right]+\sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right],$$

この対数微分を取り

(5) $$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)-\frac{1}{s-1}-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)+\sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right]=$$
$$=\log 2\pi-\left[\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{1}\right]+$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s-(-2q)}+\frac{1}{(-2q)}\right]+\sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right],$$

(6) $$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=\frac{1}{(s-1)^{\nu+1}}+$$

$$-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(s-(-2q))^{\nu+1}}-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu=1,2,\cdots),$$

(7) 関数等式 $functional\ equation$:

$$\zeta(1-s)=2\cos\frac{\pi}{2}s\cdot\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^{s}}\zeta(s).$$

但し，γ_0 は Euler の定数である。

補題 4 ([18] 補題 6.9 系の一般化) $s=\sigma+it\neq 1,\rho,|t|>2$ として,

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=-\sum_{|t-\gamma|\leq 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\quad(\nu=1,2,\cdots)$$

証明 補題 3,(6) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=\frac{1}{(s-1)^{\nu+1}}-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{[s-(-2q)]^{\nu+1}}-\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}.$$

上記第 1 項は，$\mathrm{O}(t^{-\nu-1})$ である。

上記第 2 項については，$|s+2q|$ は $2q<\max\{-\sigma,0\}$ で q について単調減少，$2q\geq\max\{-\sigma,0\}$ で単調増加であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{|s+2q|^{\nu+1}}&=\left\{\sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}}+\sum_{2q\geq\max\{-\sigma,0\}}\right\}\frac{1}{\{(\sigma+2q)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}}\frac{1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{t^{\nu+1}}+\int_{\frac{\max\{-\sigma,0\}}{2}}^{\infty}\frac{dx}{\{(\sigma+2x)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2}\int_{\max\{-\sigma,0\}}^{\infty}\frac{dy}{\{(\sigma+y)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&\leq\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\{x^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&=\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{tdy}{\{1+y^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu}}\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}\\
&=\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu}}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{t^{\nu}}\left(\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&\ll\frac{1}{t^{\nu}}
\end{aligned}$$

第３項については，これを２つの和に分ける：

$$\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}=\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

この第２項を評価する。ここで $t>0$ と仮定しても一般性を失わない。

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\right| \le \sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}}\\
=\ &\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
<\ &\sum_{\gamma<0}\frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1,\gamma>0}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
<\ &\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\gamma^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1,\gamma>0}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
=\ &\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m\le\gamma<m+1}\frac{1}{\gamma^{\nu+1}}+\sum_{m=1,\ m\le\gamma<m+1,|t-\gamma|>1}^{[t]-2}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2,\ m\le\gamma<m+1,|t-\gamma|>1}^{\infty}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)\\
<\ &\sum_{m=1}^{\infty}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{m^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{([t]-(m+1))^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{(m-([t]+1))^{\nu+1}}+\\
&+\mathrm{O}(\log t)\\
&\quad as\ \ \nu\to\infty,
\end{aligned}$$

ここで，後の補題５を使った。更に補題５を使うと

$$\begin{aligned}
&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\\
\ll\ &\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+
\end{aligned}$$

$$+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)$$

また更に補題1を使うと

$$\begin{aligned}
&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t\sum_{l=1}^{[t]-2}\frac{1}{l^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log(l+[t]+1)}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log t+\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\log t
\end{aligned}$$

これより

$$\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}=\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

以上から補題は示された。□

補題 5 $N(T) := \sharp\{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = \zeta(\beta + i\gamma) = 0,\ 0 < \gamma \leq T\}$ とすると，

$$N(T+1) - N(T) < \frac{5}{2}\log T \quad for\ T \gg 1 \quad (T \geq e^{100}).$$

証明 [18] を精密化：補題 3,(2),(5) より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) \\
&= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left\{\log\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{s}{2}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\} + \frac{1}{s} \\
&= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log s - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right) \\
&= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log s \\
&= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{2}\log 2\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|}\right) + \\
&+ \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log s = \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

ここで $s = (1+\epsilon) + iT\ (0 < \epsilon)$ と置くと

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log((1+\epsilon) + iT) \\
&= \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}((1+\epsilon) + iT) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT) - \rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{O}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon+iT}} + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}$$

この両辺の実部 $\Re$ を取って

$$\frac{1}{2}\log\sqrt{(1+\epsilon)^2+T^2}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \Re \left\{ \frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \left\{ \frac{1+\epsilon-\beta}{(1+\epsilon-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \right\}$$
$$> \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log T + \frac{1}{4}\log\left(1+\left(\frac{1+\epsilon}{T}\right)^2\right)$$
$$> \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log T > \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1+\epsilon'}{2}\log T$$
$$> \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2} \quad \text{with some } \epsilon' > 0$$
$$> \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+1} = \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+1} \sum_{T<\gamma\le T+1} 1$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{(1+\epsilon')((1+\epsilon)^2+1)}{2\epsilon}\log T$$
$$> \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 = N(T+1) - N(T)$$

ここで $\epsilon = \sqrt{2},\ \epsilon' = 0.035533$ と置くと

$$\begin{aligned}\frac{5}{2}\log T &> \frac{(1+\epsilon')((1+\sqrt{2})^2+1)}{2\sqrt{2}}\log T \\ &= \frac{1+0.035533}{2}(4.828427124\cdots)\log T > N(T+1) - N(T)\end{aligned}$$

$$for\ T \gg 1$$

となり証明は終了した。□

補題 6 (Theorem26 of [7] の一般化)
$m \gg 1,\ \nu = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$m-1 < T_m \leq m$ なる T_m が存在して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)}\right| &\ll (6\log T_m)^{\nu+2} \\ &\ll (6\log m)^{\nu+2} \end{aligned}$$

を満たす。

証明　虚軸方向の区間 $(i(m-1),\ im]$ を，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 等分すると，補題 5 により，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 個に分割された臨界帯 critical strip:$0 < \sigma < 1$ の小区間には，$\zeta(s)$ の零点 zero を含まないものが少なくとも 1 個ある。この小区間の虚軸方向の 2 等分点を iT_m として，補題 4 を使うと

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)} \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\leq 1} \frac{1}{|(\sigma-\beta) + i(T_m-\gamma)|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\leq 1} \frac{1}{|T_m-\gamma|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\leq 1} \left\{\frac{1}{2}(\frac{5}{2}\log T_m + 1)^{-1}\right\}^{-\nu-1} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\leq 1} \{5\log T_m + 2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & (5\log T_m)\{5\log T_m + 2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m) \quad (\textstyle\sum \text{に補題 5 を使った。}) \\ \ll\ & (6\log T_m)^{\nu+2} \\ \ll\ & (6\log m)^{\nu+2} \end{aligned}$$

となり補題は証明された。□

補題 7　$s = \sigma + it$ を $\zeta(s)$ の正則点として，s に一番近い $\zeta(s)$ の複素零点は 1 つとして，それを ρ_0 とする。そして $|s-\rho_0| < |s-(-2q)|\ (q = 1, 2, \cdots), |s-\rho_0| < |s-1|, |s-\rho_0| \ll 1, |s-\rho_0| < \sigma < |s|$ とする。

このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

$t=\gamma_0$のときは

$$=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log|\gamma_0|}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}$$

証明 補題4,5より　(as　$\nu\to\infty$)

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=-\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)=$$

$$=-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-$$

$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)+\mathrm{O}(\log t)\ ((**)\text{による。})$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}1+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\mathrm{O}(\log t)+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left((s-\rho_0)^{\nu+1}\log t\right)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(2^{-(\nu+1)}\log t\right)\ \left(|s-\rho_0|\ll\frac{1}{2}\text{による。}\right)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

$$= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

$t=\gamma_0$のときは$s-\rho_0=\sigma-\beta_0$となるので

$$\begin{aligned} &= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log|\gamma_0|}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \\ &= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \quad as\ \nu\to\infty \quad \square \end{aligned}$$

補題 8　[10], [11], [18]
$c>0,\ Y>0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{Y^w}{w^2}dw = \begin{cases} \log Y, & (1\le Y) \\ 0, & (0<Y\le 1) \end{cases}$$

補題 9（[20] の改変）
$c>0,\ X,Y>1, n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{\frac{w}{\nu}}w^2\log Y}dw = \begin{cases} 1 & ,\quad (n\le X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right)\le 1, & (X^\nu\le n\le (XY)^\nu) \\ 0 & ,\quad ((XY)^\nu\le n) \end{cases}$$

証明　被積分関数を展開して補題8を使えば良い。□

補題 10
実数上有界な台 $[B,C]$ を持つ複素数値関数 $f(v)=f_1(v)+if_2(v)$,（$f_1(v):=\Re f(v)$, $f_2(v):=\Im f(v)$）の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivx)dv \quad \cdots(a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z=x+iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv \quad \cdots(b)$$

は $z=x+iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。
注　この補題は、ある意味，弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明　複素解析的ならば実解析的であるから，後者を証明すれば良い。

$$F(z)=F(x+iy)=F_1(z)+iF_2(z)=F_1(x+iy)+iF_2(x+iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$，$F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv=\int_B^C f(v)\exp(ivz)dv,$$

$$f(v)\exp(ivz)=\{f_1(v)+if_2(v)\}\exp[iv(x+iy)]=$$

$$=\{f_1(v)+if_2(v)\}e^{-vy}\{\cos(vx)+i\sin(vx)\}$$

$$=\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}+i\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}$$

であり，この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=-\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y}=-\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている)，これより

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=\frac{\partial F_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

主定理１の証明

以降，$o(\cdot)$，$\mathrm{O}(\cdot)$，$\ll$，$\sim$ 等の記号は $\nu\to+\infty$ のときを主に考えている。
$s=\sigma+i\gamma_0$，$\frac{1}{2}<\sigma<1$，$\nu\in\mathbf{N}$，$1\ll\nu$，$X,Y>1$，$\delta>1$ として次の積分を考える：

$$I_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)dw}{w^2\log Y}$$
$$(\frac{1}{2}<\sigma<1,\ w=u+iv).$$

ここで，後に $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma-\beta_0}$, $\delta > 1$ [22] とする。δ は後に決める。
$\sigma = \Re s > 1$ であるとき，

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}$$

は一様絶対収束するので積分 $\int$ と和 $\sum$ が交換出来て，補題 9 を使うと，この積分 I_ν は

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{w/\nu}}\frac{dw}{w^2\log Y} \\ &= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}c_n, \end{aligned}$$

$$where\ c_n := \begin{cases} 1 & , \quad (n \le X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \le 1, & \quad (X^\nu \le n \le (XY)^\nu) \\ 0 & , \quad ((XY)^\nu \le n) \end{cases}$$

$\cdots(1)$

となる。ここで，$\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数，即ち，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & (n = p^k,\ \text{with some prime } p \text{ and some } k \in \mathbf{N}\ \text{のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$(-1)^{\nu+1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

である。
ここで積分路を次の $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである：$A > 1$ として

$$\begin{aligned} &L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \\ &L_1 = (\nu - i\infty,\ \nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0)], \\ &L_2 = [\nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0),\ -A + i\nu(V_m^- - \gamma_0)], \\ &L_3 = [-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0),\ -A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)], \\ &L_4 = [-A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0),\ \nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)]. \\ &L_5 = [\nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0),\ \nu + i\infty). \end{aligned}$$

留数定理により，

$$
\begin{aligned}
I_\nu &= \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで，補題７を使った。また，$\nu\gg 1$ であるので $\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})$ の特異点 $w=\nu(\rho-s)$ は $\Re\nu(\rho-s)\ll -A$ となり，積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w=\nu(\rho-s)$ は存在しない (Fig.1,2 参照)：

$$
\begin{aligned}
\sigma-\frac{A}{\nu}&\le\Re\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\sigma+\frac{u}{\nu}\le\sigma+1\\
V_m^-&\le\Im\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\gamma_0+\frac{v}{\nu}\le V_m^+
\end{aligned}
$$

次に (2) の５つの積分を上から評価する。
積分路 L_1 上では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^- -\gamma_0)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+1)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|w|^2}dw\\
&\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^{\nu+1}}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dv}{\nu^2+v^2}\quad\text{(補題１を使った。)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \\
&= (XY)^\nu \frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\
&\ll (XY)^\nu \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \\
&\ll \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \qquad \cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。
積分路 L_5 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw \\
&\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \qquad \cdots(3')
\end{aligned}
$$

積分路 L_2 上では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw \\
&\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu+i\nu(V_m^- -\gamma_0)}^{-A+i\nu(V_m^- -\gamma_0)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma_0+\frac{u}{\nu}+\frac{i}{\nu}\nu(V_m^- -\gamma_0))^{(\nu)}\right| \times \\
&\times\frac{(XY)^\nu}{|i\nu(V_m^- -\gamma_0)|^2}dw \\
&\ll \frac{1}{\log Y}\int_\nu^{-A}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\frac{u}{\nu}+iV_m^-)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|\nu(V_m^- -\gamma_0)|^2}du \\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}\int_\nu^{-A}\frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2}du \\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}(A+\nu)\frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \qquad \cdots(4)
\end{aligned}
$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw \\
&\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \qquad \cdots(4')
\end{aligned}
$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。$B \gg 1$ として積分路 L_3 を３つ：

$$
\begin{aligned}
&L_{3,1} := [-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0), -A - iB],\\
&L_{3,2} := [-A - iB, -A + iB],\\
&L_{3,3} := [-A + iB, -A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)],\\
&0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}
\end{aligned}
$$

に分けて評価する。A の値は後に決めるが，その A の値に対して B を定める。
さて

$$
\left(s - \rho_0 + \frac{w}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(s - \rho_0 + \frac{-A + iv}{\nu}\right)^{\nu+1}
$$

を考える。
仮定している $s - \rho_0 = \sigma - \beta_0$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$
\begin{aligned}
&\left\{s - \rho_0 + \frac{-A + iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&= \left\{(\sigma - \beta_0) + \frac{-A + iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&= \left\{(\sigma - \beta_0)\left(1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)\right\}^{\nu+1}\\
&= (\sigma - \beta_0)^{\nu+1}\left\{1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right\}^{\nu+1},
\end{aligned}
$$

$$
\left\{1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}
$$

は $|v| \le B$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\left\{1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\
&= \frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)} \exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\\
&= (1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

であり, $|v| \geq B$ のときは,

$$\begin{aligned}
&\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)} \\
&=\left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\left|1+i\frac{v/\{\nu(\sigma-\beta_0)\}}{1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}}\right|^{-(\nu+1)} \\
&\leq \left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\cdot 1 \qquad (|x+iy| \geq |x|, x, y \in \mathbf{R} \text{ を使った。}) \\
&\leq \left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,3}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-\gamma_0)}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-\gamma_0)}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{\left|s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y} \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y} \\
&\leq \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)dv}{(A^2+v^2)} \\
&\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\infty}\frac{dv}{(A^2+v^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\int_{\frac{B}{A}}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\left\{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$

（ $0<\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\ll\exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)$ と B を選んだ.）

$$=\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y}$$

$\cdots(5)$

ここで $w\in L_{3,3}$ であるから，$w=-A+iv=-A+i\nu(y-\gamma_0)$ と置いて，$B\le v\le\nu(V_m^+-\gamma_0)$ より

$$\begin{aligned} s+\frac{w}{\nu} &= \sigma+i\gamma_0+\frac{-A+i\nu(y-\gamma_0)}{\nu} \\ &= (\sigma-\frac{A}{\nu})+iy \quad (\frac{B}{\nu}+\gamma_0\le y\le V_m^+). \end{aligned}$$

従って，$\rho\ne\rho_0$ なる ρ に対して $w\in L_{3,3}$ であるとき

$$\Re\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\sigma+\frac{-A}{\nu}<\sigma,$$

$$\gamma_0<\gamma_0+\frac{B}{\nu}\le\Im\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\gamma_0+\frac{v}{\nu}\le V_m^+,$$

$$\frac{1}{2}\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho\right|>\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho_0\right|$$

となるので補題7を使ったことに注意すべきである。
$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,1}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right|$$

$$\le\frac{1}{2\pi}\int_{-A+i\nu(V_m^--\gamma_0)}^{-A-iB}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}$$

$$\ll\frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$

$$=\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y}$$

$\cdots(5')$

となる。
最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$

について詳述する:
$|v|\leq B$ のとき，

$$\begin{aligned}&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\&=\frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)}\exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\\&=(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\end{aligned}$$

であったが，これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)}\ll 1$ である $(\nu\gg 1)$ ので

$$\begin{aligned}&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\&=\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1}\times\\&\times\exp\left[(-\nu)\log\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right]\\&=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\times\\&\times\exp\left[(-\nu)\left\{\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^2+\cdots\right\}\right]\\&=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\times\\&\times\exp\left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)}+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots\right]\\&=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\times\\&\times\exp\left[\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\\
&= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\times\\
&\times\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\\
&= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

である。このことを使って

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^{\nu+1}}\times\\
&\times\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv\\
&\cdots(\star)
\end{aligned}
$$

$(\star)$ の右辺の積分を

$$
F_\nu(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times
$$

$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) i dv$$

と置いて

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) X^{-A} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) i dv$$

とする。

$$\left| \frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) \right|$$
$$\leq \frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

をみたし,

$$\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

は可積分 integrable であるので
Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$

である。また補題 10 より
$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。
また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X = 0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) X^{-A} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) i dv$$

は $X = 0$ を除いて $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu \gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}F_\nu(X) \ \ with \ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

で $F(X)$ は $X>0$ で実解析的でνに依存しない
複素数値実解析関数である。

$\cdots(6)$

(1), (2), (3), (3′), (4), (4′), (5), (5′), (6), 補題 9, $s=\sigma+it=\sigma+i\gamma_0$ である事を使うと

$$I_\nu \equiv$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}c_n$$
$$= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}+$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}}+\int_{L_{3,2}}+\int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw,$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}}+\int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw-$$
$$-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}c_n+$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\right.$$
$$\left.+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}\right]=$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}c_n+$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}$$

$\Longleftrightarrow$ ♣

を得る。ここで上記左辺の第 1 項の中：

$$\alpha_\nu:=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)$$

が

$$|\alpha_\nu|>\frac{3}{4}\quad(\nu\gg1),\quad\alpha:=\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu$$

であるように $A>1,\ Y>1$ を選び (実際の A,B の選び方は第 1 番目に上記のように A を選び，第 2 番目に B を選ぶ。α を定める際，X を変化させずに A を定めることが出来る事に注意すべきである。)，そして

$$\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right\}$$

に関して

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq0$$

となるよう

$$X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\ll\frac{1}{\sigma-\beta_0},\ \delta>1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと，定数 constant でないこと (**注 1**) から可能である。また上記

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。
従って上記♣は
♣ $\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha_\nu-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}=$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}c_n+$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}$$
$$with\ \ \alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0,\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X),\quad \alpha:=\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu$$
$$\cdots(7)$$

となる。

$$\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$
$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0,\quad \alpha:=\lim_{\nu\to\infty}\alpha_\nu$$

より，即ち

$$\left|\alpha_\nu-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\to\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|>0\ \ as\ \nu\to\infty$$

より，十分小さい正数 $0<\epsilon_0\ll 1$ を

$$0<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0$$

を満たすように選ぶと十分大きい $^\forall\nu\gg 1$ に対して

$$0<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0<\left|\alpha_\nu-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|+\epsilon_0\cdots(\star\star)$$

となる。
上記 (7) の左辺の絶対値の $\frac{1}{\nu}$ 乗を考えるが，$(\star\star)$ から

$$0<\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\le$$
$$\le\left\{\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left|\alpha_\nu-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\right\}^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}c_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2(\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}}c_n^2}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}1^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

(Cauchy − Schwarz − Bunyakowski の不等式を使った. 注 **2**)

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.$$

$$\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.$$

$$\left.+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+O\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^\nu}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^\nu+\right.$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\Bigg]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\cdots(8)$$

を得る。(8) をまとめると

$$0<\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\leq$$

$$\leq\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\cdots(9)$$

となる。

ここまでは ν は有限値 finite value であった。ここで，$\nu\to\infty$ とすると (9) は補題 2 を使って

$$0<\frac{1}{\sigma-\beta_0}=\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\leq$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\left(\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^{\nu}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$

(補題 2 を使った。)

$$\cdots(10)$$

従って

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0} \leq$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$
$$\cdots(11)$$

が得られる。
(11) で $\sigma-\beta_0>0$ を保ちながら，σ を β_0 に十分近づければ，$\beta_0>\frac{1}{2}$ であるので，(11) の左辺は ∞ に近づき，一方 (11) の右辺は

$$\max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}\Bigg|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$，$\beta_0>\frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注 1：$F(X)$ が定数でないことの証明

$$G(z) := F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv$$
$$=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$
$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2}\exp((-A+iv)z)idv$$

$$\textit{with}\quad z:=\log X$$

$G(z)=\textit{constant}$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\frac{d}{dz}G(z)=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$
$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)}\exp((-A+iv)z)idv$$
$$=0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp((-A+iv)z)idv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp(ivz)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{-A+iv}\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\iff$

$$Y^A \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv$$

$\iff$

$$Y^A \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$
$$= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$

$\iff$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right) + B\log Y\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}$$

$\iff$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\cos(B\log Y) + \cos\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\sin(B\log Y)}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}$$

ここで, $\log Y = 2\pi l,\ l, B \in \mathbf{N}$ とすると

$\iff$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l}$$

$\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} \neq 0$ であると，σ の値を調節して，出来るので
$\Longleftrightarrow$

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X \gg 1$ であるが，$A \gg 1$ であるので
$\Longleftrightarrow$

$$1 \ll e^{2\pi l A} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi l}, l \in \mathbf{N}, 1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq constant.$ $\square$

注２：Hölder の不等式と Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の使い分け
(8),(9) を得るとき，

$$\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}c_n$$

に Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使って

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}c_n\right]^{\frac{1}{\nu}} \leq \\
&\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2(\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}}c_n^2}\sqrt{\sum_{n\leq(XY)^\nu}1^2}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^\nu}\right]^{\frac{1}{\nu}}
\end{aligned}$$

$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\to \frac{\sqrt{XY}}{\sigma-\frac{1}{2}} \quad as\ \nu\to\infty \quad (a),\ X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

これに対して Hölder の不等式を使うと $(\mu>1,\ \frac{1}{\mu}+\frac{\mu-1}{\mu}=1)$

$$\left[\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^{\nu}}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^{\sigma}}c_n\right]^{\frac{1}{\nu}}\leq$$
$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\left\{\sum_{n\leq(XY)^{\nu}}\frac{\Lambda(n)^{\mu}(\log n)^{\mu\nu}}{n^{\mu\sigma}}c_n^{\mu}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\left\{\sum_{n\leq(XY)^{\nu}}1^{\frac{\mu}{\mu-1}}\right\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\left\{(\mu(\nu+1))!\left(\frac{1}{\mu\sigma-1}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\leq \left[\left\{\frac{(\mu(\nu+1))!}{(\nu!)^{\mu}}\left(\frac{1}{\mu\sigma-1}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$
$$\to \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}} \quad as\ \nu\to\infty \quad (b),\ X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)$$

($\Gamma(s)$ に関する Stirlingの公式を使った.)

以上から次が云える。

補題 11 $\sigma>\frac{1}{2}$, $\mu>2$ に対して,

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma-\frac{1}{2}}<\frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}}.$$

証明 $\frac{1}{\mu} =: x$ として，

$$f(x) := \frac{(XY)^{1-x}}{\sigma - x} \quad (0 < x \le \frac{1}{2})$$

の増減を調べる。

$$f'(x) = \frac{(XY)^{1-x}}{(\sigma - x)^2}\{-(\sigma - x)\log XY + 1\}$$

より

$$f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$$

となるので以下に増減表を作ると ($\frac{1}{2} < \sigma < 1$)

x	0		$x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$		σ
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{XY}{\sigma}$	$\searrow$	$(\log XY)(XY)^{1-\sigma+\frac{1}{\log XY}}$	$\nearrow$	$+\infty$

X, Y は大きい値を取る事が出来るので

$$x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2} \Longleftarrow X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ (\delta > 1),\ Y > 1$$

とする事が出来る。従って

$$\min_{0<x\le\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

即ち $\min_{\mu\ge 2} f(\frac{1}{\mu})$ を与える μ は $\mu = 2$ である。□

注意

補題11より $\mu > 2$ のとき

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma - \frac{1}{2}} < \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}.$$

であるが，ここで $\sigma \to \frac{1}{2} + 0$ のとき，上記
左辺 the left-hand side$\to +\infty$, 右辺 the right-hand side$\to$ 有限値 finite value となり矛盾 contradiction が生ずるので，これを救う為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right),\ \mu' = 2, \quad i.e.\ X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

とするか，
分母の μ を $\mu=2$ とする，即ち

$$\text{補題 11 の右辺：}\ \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\ \text{を}\ \frac{(XY)^{1-\frac{1}{2}}}{\sigma-\frac{1}{2}}$$

とする必要性が出て来る。□

$X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu'}}\right)$ の分母の形 form: $\sigma-\frac{1}{\mu'}$ の必要性
$(a),(b)$ を導く際

$$\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}}\sim\int_1^{(XY)^\nu}\frac{(\log x)^{\mu(\nu+1)}}{x^{\mu\sigma}}dx=$$

$$=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\int_0^{\mu\nu(\sigma-\frac{1}{\mu})\log XY}y^{\mu(\nu+1)+1-1}e^{-y}dy=$$

$$=\left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\gamma\left(\mu(\nu+1)+1,\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY\right)$$

$(\gamma(a,z)$ は不完全 $gamma$ 関数)

この不完全 gamma 関数：$\gamma(\mu(\nu+1)+1,\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY)$ が
$\sigma\to\frac{1}{2}+0$ のときでも

$$\gamma\left(\mu(\nu+1)+1,\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY\right)\neq o(\Gamma(\mu(\nu+1)+1))\quad as\ \nu\to\infty,$$

$$\gamma\left(\mu(\nu+1)+1,\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY\right)\sim\Gamma(\mu(\nu+1)+1)\quad as\ \nu\to\infty$$

となる為には

$$\lambda:=\frac{\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY}{\mu(\nu+1)+1}>1$$

が必要である ([22] 参照):

As $\nu\to\infty$,

$$\lambda:=\frac{\mu\nu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY}{\mu(\nu+1)+1}=\frac{\mu\left(\sigma-\frac{1}{\mu}\right)\log XY}{\mu\left(\frac{\nu+1}{\nu}\right)+\frac{1}{\nu}}\to$$

$$\rightarrow \left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right) \log XY > 1$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$XY > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)$$

$Y > 1$ であるので

$$\Longleftarrow$$

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) \geq \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right) \quad (\delta > 1)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}} \geq \frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{\mu'} \geq \frac{1}{\mu} \Longleftrightarrow \mu \geq \mu'$$

これを満たす為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \quad \mu \geq \mu', \quad \delta > 1$$

となる X の形 form が必要である。

一方，I_ν の積分路を移動した結果現れる

$$\sum_{n \leq X^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} c_n \neq 0 \quad (c_n = 1 \ for \ n \leq X^\nu)$$

である為には，$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > 1$ が必要である。この為には $\sigma - \frac{1}{\mu'} > 0$ である必要があるが，$\sigma \rightarrow \frac{1}{2} + 0$ を考慮に入れると $\mu' \geq 2$ が必要である。これと前述の事を合せると

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \quad \mu \geq \mu' \geq 2, \quad \delta > 1$$

となる X の形 form が必要である。X が，この形であれば μ' は任意に選べるので $\mu' = 2$ とする。即ち

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right), \quad \mu \geq 2, \quad \delta > 1$$

である。

注意

補題 11 **の証明**の中で

$$\sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2} \Longleftarrow X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ (\delta > 1), \ Y > 1$$

であったが，$\sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2}$ は次の条件を持つ。

$$\sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2} \Longleftrightarrow XY > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

$Y > 1$ であるから

$$\Longleftrightarrow X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) > \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right) \geq \exp\left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{\mu'} \geq \frac{1}{2} \Longleftrightarrow 2 \geq \mu'$$

従って，先の $\mu \geq \mu' \geq 2$ と合せて $\mu' = 2$

(I)　$\frac{1}{2} < \beta_0 < \sigma < 1$ **の場合**（$\mu \geq 2$)

考えている領域で $i\gamma_0$ 水平線上にあると仮定する $\zeta(s)$ の零点を $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ とすると $\sigma > \beta_0 > \frac{1}{\mu}$ であれば，$(a), (b)$ と，(11) を導いた方法により (11) と同様に

$$\frac{1}{\sigma - \beta_0} \leq$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$
$$\cdots (11')$$

が得られる。ここで $\sigma \to \beta_0$ とすれば，(11) の左辺は $+\infty$ に発散し，右辺は有限値となり矛盾を引き起こす。従って仮定した $\zeta(s)$ の零点 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ は存在しない。

(II) $\frac{1}{2} = \beta_0 < \sigma < 1$ **の場合**（$\mu \geq 2$）

(11′) と同様に

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sigma - \beta_0} \leq$$

$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$

$$\cdots(11'')$$

が得られる。ここで $\sigma \to \beta_0 = \frac{1}{2}$ とすれば，(11) の左辺は $+\infty$ に発散し，右辺も $+\infty$ に発散し，矛盾は起きない。

(III) $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma_0) \neq 0$ **の場合**

Ｉの結果より $\zeta(\sigma+i\gamma_0) \neq 0$ $(\sigma > \frac{1}{2})$ である事と $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation より $\zeta(\sigma + i\gamma_0) \neq 0$ $(\frac{1}{2} > \sigma > 0)$ である。

(IV) $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, $\zeta(\frac{1}{2} + i\gamma_0) = 0$ **の場合**

Ｉの結果より $\zeta(\sigma+i\gamma_0) \neq 0$ $(\sigma > \frac{1}{2})$ である事と $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation より $\zeta(\sigma + i\gamma_0) \neq 0$ $(\frac{1}{2} > \sigma > 0)$ である。

この場合 $0 < \sigma < \frac{1}{2}$ で積分路 $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ の右側に特異点 $w = \nu((\frac{1}{2} + i\gamma_0) - s) = \nu(\frac{1}{2} - \sigma)$ が現れ，その留数は後に証明する補題 12 より

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}$$

$$\ll \frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}.$$

であるので (2) は

(この場合

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{|\sigma - \frac{1}{2}|}\right)$$

とする。)

$$I_\nu = \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\} +$$

$$
\begin{aligned}
&+\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}+\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}\right)+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2')
\end{aligned}
$$

となり，従って (7) は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(\sigma-\frac{1}{2})^{\nu+1}}\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}=\\
&=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}c_n+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}\right)+\\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|})}{U_m}\right)^\nu\right\}\\
&\mathit{with}\ \ \alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\ne 0,\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)\\
&\qquad\cdots(7')
\end{aligned}
$$

となる。この右辺第 1 項に Hölder の不等式を適用すると $(\frac{1}{\mu}<\sigma<\frac{1}{2})$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\frac{1}{2}-\sigma}\le\\
&\le\max\left\{\left(\frac{\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right),\ \left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)}}{(\frac{1}{2}-\sigma)}\right),\right.\\
&\left.\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|}\right)}{\sigma}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|}\right)}{U_m}\right)\right\},\ X=\exp\left(\frac{3\delta}{|\sigma-\frac{1}{2}|}\right).\\
&\qquad\cdots(11''')
\end{aligned}
$$

が得られるが $\sigma \to \frac{1}{2}-0$ としても何の矛盾も生じない。□

補題 12　$0<\sigma<\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+i\gamma_0$ が $\zeta(s)$ の零点であるとき

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}$$
$$\ll \frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}.$$

証明

補題6,(i) の

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}=\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-1)^{\nu+1}}-$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-(-2n))^{\nu+1}}-$$
$$-\sum_{\rho}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N}).$$

より

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}=$$
$$=(-\nu^{\nu+1})\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left[\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right]_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$
$$=-\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\frac{d^{\nu-k}}{ds^{\nu-k}}\{X^w(Y^w-1)\}\Big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$
$$=-\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\times$$
$$\times\{(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w-(\log X)^{\nu-k}X^w\}\big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$
$$\ll\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!(\nu-k)!}(k+1)!|w|^{-2-k}\,(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w\Big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$
$$\ll\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{k+1}{(\nu-k)!}\left|\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\right|^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$
$$\ll\frac{1}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{l=0}^{\nu}\frac{1}{l!}\nu^{l}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{l}(\log XY)^{l}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\times\\
&\times\left[\exp\{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log(XY)\}-\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{l!}(\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log XY)^{l}\right]\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\exp\left\{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log(XY)\right\}\\
&\ll \frac{(XY)^{2\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\ll\frac{(XY)^{2\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}.
\end{aligned}
$$

□

以上が **Hölder** の不等式と **Cauchy-Schwarz-Bunyakowski** の不等式の使い分けである。□

パラメータ $X,Y,A,B,\sigma-\beta_0$ の選び方

$X=\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}, Y=e^{2\pi l}, A,\ l,B\in\mathbf{N},\sigma-\beta_0$ は次の条件 (a),(b),(c)

$$
\begin{aligned}
&0<\sigma-\beta_0\ll\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{XY}=\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{e^{2\pi l}\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}}\cdots(\mathrm{a})\\
&\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\ll\exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\cdots(\mathrm{b})\\
&|\alpha_\nu|=\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right|>\frac{3}{4}\cdots(\mathrm{c})\\
&\quad(\nu\gg1)
\end{aligned}
$$

満たすが，先ず (a) を満たすように $\sigma-\beta_0$ を選び，次に (c) を満たすように A を選んでから, (b) を満たすように B を選ぶ。

主定理 2 の証明

m を固定して主定理 1 を繰り返し適用すると，
$C_{m-1}<\gamma_0<C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり，
非零領域 zero free region：

$$\{\sigma+it \mid \beta_0<\sigma,\ C_{m-1}<t<C_m\}$$

は，左方向に広がって行き，遂には

$$\{\sigma+it \mid \frac{1}{2}<\sigma,\ C_{m-1}<t<C_m\}$$

となる。
主定理は次の結論を導いている。即ち，存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず，$\frac{1}{2}<\sigma$ となる $\zeta(s)$ の零点 $s=\sigma+it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば，結局 $\zeta(s)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2}<\sigma$ には存在しないと結論付けられる。
$\beta_0=\frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので，この過程は $\sigma=\frac{1}{2}$ で止まる。
従って $\beta_0>\frac{1}{2}$ となり得ない。また $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の関数等式 functional equation により，$0<\beta_0<\frac{1}{2}$ でもあり得ず，$\beta_0=\frac{1}{2}$ となる。□

参考文献

[1] Apostol,T.M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[2] Chandrasekharan,K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.

[3] Davenport,H: *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)

[4] Estermann,T.: *Introduction to Modern Prime Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1961.

[5] Huxley,M.N.: *The Distribution of Prime Numbers* (*Large seives and zero-density theorems*), Oxford, Clarendon Press, 1972.
(p.54(12.39) $e^{B(x)s}\to e^{B(\chi)s}$, (12.40) $\frac{1}{2}\log 2\pi\to\frac{1}{2}\log\pi$ とすべきである。p.56 (13.6) もそうである。)

[6] 一木正幸 Ichinoki,M.:『素数定理；その解析的証明』丸善出版サービスセンター，2003.
The Prime Number Theorem; its analytical proofs, Maruzen Publish Service Center, 2003.

[7] Ingham,A.E. : *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.

[8] Karatsuba,A.A. (translated by Nathanson,M.B.): *Basic Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, traslation from the original Russian ed.: Osnovy analiticheskoj teorii chisel, 2nd ed., Nauka, Moscow 1983.

[9] Kowalski,E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.

[10] Landau,E.: *Handbuch der Leher von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 66,87,88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]

[11] 三井孝美 Mitsui,T.:『整数論；解析的整数論入門』至文堂，1970.
Number Theory; *Introduction to Analytic Number Theory* (in Japanese), Shibunndo, Tokyo, 1970.

[12] Montgomery,H.L. and Vaughan,R.C.: *Miltiplicative Number Theory* I. *Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, 2007.

[13] 本橋洋一 Motohashi,Y.:『解析的整数論 I―素数分布論―』, 朝倉書店, 2009, *Analytic Number Theory I —Theory of Prime Number Distribution—*, Asakura-Shoten, Tokyo, 2009.

[14] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III: 補遺); 実軸上或いは実軸近くの零点, A Mean Value Integral(III:Appendix); Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Riemann Zeta-Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 265-303, *The Kagoshima Journal of Economics,* **60**, December 2019, 265-303 .

[15] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Riemann 予想の証明に就いて On a Proof of the Riemann Hypothesis, 鹿児島経済論集，第 63 巻 1 号，2022 年 6 月，1-39, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, June 2022, 1-39.

[16] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Riemann 予想の証明に就いて [II] On a Proof of the Riemann Hypothesis [II], 鹿児島経済論集，第 63 巻 2 号, 2022 年 8 月, 57-93, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, August 2022, 57-93.

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Riemann 予想の証明に就いて [III] On a Proof of the Riemann Hypothesis [III], 鹿児島経済論集, 第 63 巻 3 号, 2022 年 12 月, 133-180, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, December 2022, 133-180.

[18] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014，2012，『素数定理の進展・下』，丸善出版，2013)

[19] Rademacher,H.: *Topics in Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[20] Selberg,A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.

[21] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese)，Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[22] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[23] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

[24] Turán,P.: Über die Verteilung der Primzahlen (I), *Acta Sci. Szeged*, **10**(1941), 81-104.

(received 21 January 2023.)

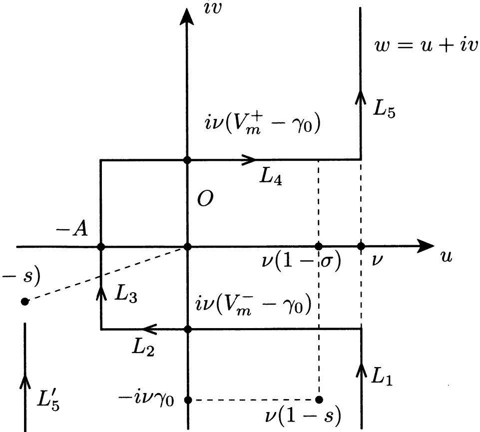

Fig. 1

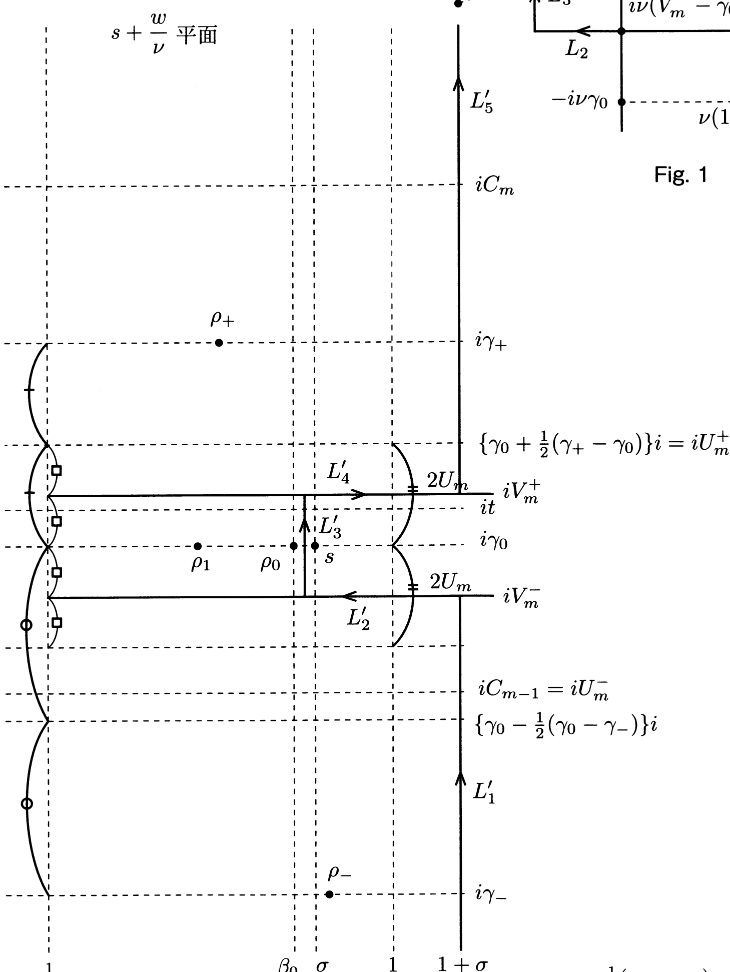

Fig. 2 $\left.\begin{array}{l}\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-) < C_{m-1} \\ \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0) < C_m\end{array}\right\}$ の場合