素数分布とVolterra型第2種積分方程式
The Distribution of Prime Numbers and Volterra's Integral Equation of Second Kind

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

In this paper, we obtain some relations between the distribution of prime numbers and Mertens' asymtotic formula on the sum of reciprocals of prime numbers:

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}$$

, using Volterra's integral equation of second kind.

Key words ; the distribution of prime numbers,Mertens's formula, the prime number theorem, Volterra's integral equation of second kind.
Mathematics Subject Classification 2020;　11N05,45D05.

以下, p は素数を表わすとする。
L.Euler は 1737 年,

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\cdots=\log\log\infty$$

即ち, $\sum_p \frac{1}{p} \sim \log\log\infty$ を示したが，これは

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} \sim \log\log x \quad (as\ x\to\infty)$$

を意味している [2]。
P.L.Čebyšev は，1851 年これを精密化して次の結果 [4]

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + B + o(1) \quad \text{with some constant } B$$

を得 (厳密に言えば，その証明は不完全であった。)，F.Mertens(1874) は，これを完全な証明にして，しかも改良した結果：
Mertens の定理 (1874,［4], [5])

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + B + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) \quad \text{(Mertens1874)}$$

$$\text{with } B = \gamma_0 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_p\frac{1}{p^k} = \gamma_0 + \sum_p\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\}$$

$$= 0.26149721\cdots \quad (\gamma_0 \text{は Euler 定数}),$$

$$\prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right) = \frac{e^{-\gamma_0}}{\log x} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log^2 x}\right), \prod_{p\leq x}\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = e^{\gamma_0}\log x + \mathrm{O}(1).$$

を得た。
この論文では，上記 Mertens の定理の第１番目の公式：素数の逆数の有限和と素数分布の関係を表わす次の２つの定理を Volterra 型第２種積分方程式を使って証明する：

定理 1 $\pi(x) := \sharp\{p\leq x\ ;\ p \text{は素数}\}$，即ち $\pi(x)$ を x 以下の素数の個数を表わすとして，

$$\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} = \log\log x + B + R(x),$$

$$\pi(x) = \int_{2-0}^{x}\frac{dt}{\log t} + E(x),$$

と置くとき，

$$R(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^{\alpha}}\right) \quad (\alpha\geq 1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$E(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{(\log x)^{\alpha}}\right)$$

となる。□

注意 $\alpha = 1$ ならば，

$$\int_{2-0}^{x} \frac{dt}{\log t} = \frac{x}{\log x} + \mathrm{O}\left(\frac{x}{\log x}\right)$$

なので

$$\pi(x) \asymp \frac{x}{\log x}$$

を導く。また，
$\alpha > 1$ ならば，素数定理：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\int_{2-0}^{x} \frac{dt}{\log t}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1$$

を導く。

定理 2 定理1と同じ前提の下，

$$E(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{(\log x)^{\beta}}\right) \quad (\beta > 1)$$

$$\Longrightarrow$$

$$R(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^{\beta-1}}\right)$$

となる。□

補題 1 $\displaystyle \theta(x) := \sum_{p \le x} \log p,\ \psi(x) := \sum_{n \le x} \Lambda(n) := \sum_{p^m \le x} \log p$

とするとき，
(ここに $\Lambda(n)$ は *von Mangoldt* 関数：

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & (n = p^k,\ \text{with some prime } p \text{ and some } k \in \mathbf{N} \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

である。)

$$\theta(x) \asymp x, \quad \psi(x) \asymp x$$

となる。□

証明 [8] 参照□

補題 2 (Legendre 1798)

$$[x]! =: n! = \prod_{p \le x} p^{\nu_p}$$

$$with \quad \nu_p := \nu_p(n!) := \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m}\right] = \sum_{m=1}^{\left[\frac{\log n}{\log p}\right]} \left[\frac{n}{p^m}\right]. \qquad \square$$

証明 [5] 参照□

補題 3 ((1); Mertens 1874, (2); Rosser,J.B., Schoenfeld,I [7])

$$\begin{aligned}\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} &= \log x + \mathrm{O}(1) \ \cdots (1) \\ &= \log x + E + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) \ \cdots (2) \\ & \quad with\ E = -\gamma_0 - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{p} \frac{\log p}{p^m} = -1.33258 \cdots \ \square\end{aligned}$$

証明 [5] 補題２より

$$\begin{aligned}\log n! &= \sum_{p \le n} \left[\frac{n}{p}\right] \log p + \sum_{p \le n} \left[\frac{n}{p^2}\right] \log p + \cdots = \\ &= n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + \mathrm{O}(\sum_{p \le n} \log p) + \mathrm{O}\left(\sum_{p \le n} n \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\log p}{p^m}\right) = \\ &= n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + \mathrm{O}(\theta(n)) + \mathrm{O}\left(n \sum_{p} \frac{\log p}{p^2}\right) = \\ &= n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + \mathrm{O}(n) \quad (\text{補題1を使った})\end{aligned}$$

一方，de Moivre-Stirling の公式より

$$\log n! = n \log n + \mathrm{O}(n)$$

であるから，これらを等置して

$$n \log n + \mathrm{O}(n) = n \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + \mathrm{O}(n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\log n + \mathrm{O}(1) = \sum_{p \le n} \frac{\log p}{p} + \mathrm{O}(1)$$

即ち，補題が証明された。□
注意 $\Lambda(n)$ と補題 1 の $\psi(x) \asymp x$ を使っても証明できる。

補題 4 $f(t)$ は考えている範囲で有界変分微分可能関数,

$$A(t) := \sum_{n_0<n\leq t} a_n \ (n_0 \geq 0), \qquad A(n_0) = 0 \text{ と置いて}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n_0<n\leq x} a_n f(n) &= \int_{n_0}^{x} f(t)dA(t) \ (\text{Stieltjes 積分}) \\ &= [f(t)A(t)]_{t=n_0}^{x} - \int_{n_0}^{x} A(t)f'(t)dt. \ \Box\end{aligned}$$

補題 5

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} &= \log\log x + B + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) \ (\text{Mertens, F. 1874}) \\ &= \log\log x + B + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^2}\right) \ (\text{Rosser, J.B., Schoenfeld, I [7]}) \\ &\text{with } B = \gamma_0 - \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}\sum_{p}\frac{1}{p^k} \\ &\qquad = \gamma_0 + \sum_{p}\left\{\log\left(1-\frac{1}{p}\right)+\frac{1}{p}\right\} \ (\gamma_0 \text{は Euler 定数}), \\ &\qquad = 0.26149721\cdots. \ \Box\end{aligned}$$

証明 [8]

$$a_n = \begin{cases} \frac{\log p}{p}, & (n = p, \text{ with some prime } p \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}, f(t) := \frac{1}{\log t}$$

と置き，

$$A(t) := \sum_{p\leq t}\frac{\log p}{p} = \log t + r(t) \ \textit{with} \ r(t) = \mathrm{O}(1) \ (\text{補題 3 による})$$

となるので

$$\begin{aligned}\sum_{p\leq x}\frac{1}{p} &= a_n f(n) = \frac{A(x)}{\log x} + \int_2^x \frac{A(t)}{t\log^2 t}dt = \\ &= \int_2^x \frac{dt}{t\log t} + \int_2^x \frac{r(t)}{t\log^2 t}dt + 1 + \frac{r(x)}{\log x} =\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \log\log x + B + R(x) \\
&with \\
&B := 1 - \log\log 2 + \int_2^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}dt, \\
&R(x) = \frac{r(x)}{\log x} - \int_x^\infty \frac{r(t)}{t\log^2 t}dt = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right) + \mathrm{O}\left(\int_x^\infty \frac{dt}{t\log^2 t}\right) \\
&\quad = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)
\end{aligned}
$$

定数 B の値についての証明は [5], [8] を参照の事。□

補題 6 Volterra 型第 2 種積分方程式：

$$y(x) + \int_2^x \frac{y(t)}{t}dt = f(x)\ (f(x) \text{ は } 0 < x < +\infty \text{ で有界とする})\cdots(*)$$

の $0 < x < +\infty$ で有界となる解 $y(x)$ は一意的 *uniquely* に決まり，

$$y(x) = f(x) - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt\cdots(**)$$

で与えられる。□

注意 逆に $(**)$ の解 f は $(*)$ で与えられる。
証明 $(**)$ を $(*)$ に代入してみると

$$\left\{f(x) - \frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt\right\} + \int_2^x \frac{1}{t}\left\{f(t) - \frac{1}{t}\int_2^t f(u)du\right\}dt = f(x)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt + \int_2^x \frac{1}{t}f(t)dt - \int_2^x \frac{1}{t^2}\left\{\int_2^t f(u)du\right\}dt = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt + \int_2^x \frac{1}{t}f(t)dt + \int_2^x \left\{\frac{1}{t}\right\}'\left\{\int_2^t f(u)du\right\}dt = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$-\frac{1}{x}\int_2^x f(t)dt + \int_2^x \frac{1}{t}f(t)dt + \left[\frac{1}{t}\int_2^t f(u)du\right]_{t=2}^x - \int_2^x \frac{1}{t}f(t)dt = 0$$

上記左辺は明らかにゼロと恒等的に等しいから $(**)$ は $(*)$ の1つの解である。
次に解の一意性を示す。
$(*)$ の解が $y_1(x)$, $y_2(x)$ と2つあったと仮定すると解の有界性から
$\varphi(x) := y_1(x) - y_2(x)$ は有界であるから $|\varphi(x)| < M$ とする。
$\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) + \int_2^x \frac{\varphi(t)}{t}dt = 0$$

を満たすので, これより

$$|\varphi(x)| \le \left|\int_2^x \frac{1}{t}\varphi(t)dt\right| \le \frac{1}{2}\int_2^x |\varphi(t)|dt \le \frac{1}{2}M\int_2^x dt = \frac{1}{2}M(x-2)$$

となるが, これを使うと

$$\begin{aligned}
|\varphi(x)| &\le \left|\int_2^x \frac{1}{t}\varphi(t)dt\right| \le \frac{1}{2}\int_2^x |\varphi(t)|dt \le \frac{1}{2}\int_2^x \frac{1}{2}M(t-2)dt \\
&\le \left(\frac{1}{2}\right)^2 M\int_2^x (t-2)dt = \left(\frac{1}{2}\right)^2 M\frac{(x-2)^2}{2}, \\
|\varphi(x)| &\le \left|\int_2^x \frac{1}{t}\varphi(t)dt\right| \le \frac{1}{2}\int_2^x |\varphi(t)|dt \\
&\le \frac{1}{2}\int_2^x \left(\frac{1}{2}\right)^2 M\frac{(t-2)^2}{2}dt = \left(\frac{1}{2}\right)^3 M\frac{(x-2)^3}{3!},
\end{aligned}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

となるので, 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して

$$|\varphi(x)| \le M\frac{\left(\frac{x-2}{2}\right)^n}{n!} \to 0 \; as \; n \to \infty.$$

となり, $\varphi(x) \equiv 0$ となる。$\square$

定理1の証明

$$\pi(x) = \int_{2-0}^x \frac{dt}{\log t} + E(x)$$

とすると明らかに $E(x) < x$ である。
補題５より

$$\sum_{p\le x}\frac{1}{p} = \log\log x + B + R(x)\ with\ R(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)\cdots(3)$$

上記左辺は Stieltjes 積分により

$$\begin{aligned}
\sum_{p\le x}\frac{1}{p} &= \int_{2-0}^{x}\frac{1}{t}d\pi(t) = \int_{2-0}^{x}\frac{1}{t}\left\{\frac{dt}{\log t} + dE(t)\right\} \\
&= \int_{2-0}^{x}\frac{dt}{t\log t} + \int_{2-0}^{x}\frac{1}{t}dE(t) \\
&= [\log\log t]_{t=2-0}^{x} + \left[\frac{E(t)}{t}\right]_{t=2-0}^{x} + \int_{2-0}^{x}\frac{1}{t^2}E(t)dt \\
&= \log\log x - \log\log 2 + \frac{E(x)}{x} + \int_{2-0}^{x}\frac{1}{t}\frac{E(t)}{t}dt \\
&\quad F(x) := \frac{E(x)}{x}\text{と置くと}\ (|F(x)| < 1) \\
&= \log\log x - \log\log 2 + F(x) + \int_{2-0}^{x}\frac{F(t)}{t}dt\cdots(4)
\end{aligned}$$

(3),(4) より

$$F(x) + \int_{2-0}^{x}\frac{F(t)}{t}dt = B + \log\log 2 + R(x)\ \ \cdots(5)$$

補題６により，(5) を $F(x)$ について解くと

$$\begin{aligned}
&F(x) = \{B + \log\log 2 + R(x)\} - \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x}\{B + \log\log 2 + R(t)\}dt \\
&= B + \log\log 2 + R(x) - \frac{1}{x}(B + \log\log 2)(x-2) - \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x}R(t)dt \\
&= R(x) + \frac{2}{x}(B + \log\log 2) - \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x}R(t)dt \\
&=: R(x) + \frac{2}{x}B' - \frac{1}{x}\int_{2-0}^{x}R(t)dt \\
&R(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\alpha}\right)\text{より} \\
&= \frac{2}{x}B' + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\alpha}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\int_{2-0}^{x}\frac{1}{(\log t)^\alpha}dt\right) \\
&= \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\alpha}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\left\{\int_{2-0}^{\sqrt{x}}\frac{1}{(\log t)^\alpha}dt + \int_{\sqrt{x}}^{x}\frac{1}{(\log t)^\alpha}dt\right\}\right)
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\alpha}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x}\left\{\frac{\sqrt{x}-2}{(\log 2)^\alpha} + \frac{x-\sqrt{x}}{(\frac{1}{2}\log x)^\alpha}\right\}\right)$$
$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\alpha}\right)$$

従って

$$E(x) = xF(x) = \mathrm{O}\left(\frac{x}{(\log x)^\alpha}\right). \ \square$$

定理 2 の証明

逆に

$$F(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{(\log x)^\beta}\right), \ (\beta > 1)$$

とする。

Mertens の定理より，

$$R(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

であり，定理 1 より

$$F(x) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

であるから，これらを (5) に適用して，$x \to +\infty$ とすると (5) は

$$0 + \int_{2-0}^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt = B + \log\log 2 + 0$$

となり

$$\int_{2-0}^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt = B + \log\log 2 \ \cdots (6)$$

が得られる。(6) により (5) は

$$F(x) - \int_{x}^{\infty} \frac{F(t)}{t} dt = R(x) \ \cdots (7)$$

と書き換えられる。(7) より

$$
\begin{aligned}
R(x) &\ll F(x) + \int_x^\infty \frac{F(t)}{t}dt \\
&\ll \frac{1}{(\log x)^\beta} + \int_x^\infty \frac{1}{t(\log x)^\beta}dt \\
&= \frac{1}{(\log x)^\beta} + \left[\frac{1}{-\beta+1}\frac{1}{(\log t)^{\beta-1}}\right]_{t=x}^\infty \\
&\ll \frac{1}{(\log x)^\beta} + \frac{1}{(\log x)^{\beta-1}} \\
&\ll \frac{1}{(\log x)^{\beta-1}}. \quad \Box
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] Dunham,W.: *Euler The Master of Us All*, Math. Assoc. of Amer., Washington D.C., 1999.
邦訳：黒川信重・若山正人・百々谷哲也訳『オイラー入門』シュプリンガーフェアラーク東京，2004，(xiv+254)pp.

[2] 黒川信重 Kurokawa,N.:『オイラー探検；無限大の滝と 12 連峰』シュプリンガー・ジャパン，2007, (iii+184)pp.
Exploring Euler's Mathematics (in Japanese)，Springer Japan, Tokyo, 2007, (iii+184)pp.

[3] Jameson,G.J.O.: *The Prime Nimber Theorem,* Cambridge Univ. Press, 2003, (x+252)pp.

[4] Mitrinović,D.S., Sándor,J. and Cristici,B.: *Handbook of Number Theory*, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London, 1996, (xxiv+622)pp.

[5] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014，2012，『素数定理の進展・下』及び訳者による補遺，丸善出版，2013)

[6] Polyanin,A.D., Manzhirov,A.V.: *Handbook of Integral Equations,* 2nd ed., Chapman & Hall/CRC, 2008, (xxvii+1108)pp.

[7] Rosser,J.B., Schoenfeld,I: Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.*, **6**(1962), 64-94.

[8] 内山三郎 Uchiyama,S.:『素数の分布』宝文館, 1970. *The Distribution of Prime Numbers* (in Japanese), HoubunKan-Shuppan, Tokyo, 1970.

(received 1 November 2022.)