Riemann予想の証明に就いて[III]
On a Proof of the Riemann Hypothesis[III]

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We also study here another proof of the Riemann Hypothesis without using the integral with respect to t in author's previous work [16] [17]. Moreover we add the reason(proof) why we use the Cauchy-Schwarz-Bunyakowski inequality instead of Hölder's inequality and very exact representation of Main Theorem 1.

Key words ; the zeros of the Riemann Zeta-function, the Riemann hypothesis.
Mathematics Subject Classification 2020; 11M06, 11M26.

$\zeta(s), (s = \sigma + it \in \mathbf{C})$ を Riemann の zeta 関数とする。又, $\rho = \beta + i\gamma$ で $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero を表わすことにする。
又, $\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。
前論文 [16] での t についての積分をすることなく証明が出来る事が判明した ($t = \gamma_0$ と固定する.) [17]。従って前論文 [16] の補題 Lemma1,3 は不要となり，その代わりに Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使い主定理 Main Theorem 1 の証明は簡潔になる事を以下に述べる [17]。
今回は以上に加え主定理 Main Theorem 1 をより正確に述べ補足し，**注 2** として Hölder の不等式でなく Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使う理由を説明,

証明する。

記号 $\mathrm{O}(\cdot)$ は Bachmann-Landau のラージ・オウ記号と云われ次を意味する：

$$\begin{aligned} as\ x \to some\ \gamma\ or\ \ \pm\infty, &\qquad or\ for\ x \in some\ A, \\ f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \quad \Longleftrightarrow &\qquad {}^{\exists}constant : C > 0\ with\ |f(x)| \le Cg(x) \end{aligned}$$

定数 C が parameter:$\alpha, \beta, \cdots$ に依存する場合:$C = C_{\alpha,\beta,\cdots}$ は

$$f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x))$$

と書くが $\alpha, \beta, \cdots$ を省略して書く場合もある。
記号 $\ll$ は Vinogradov の意味:

$$\begin{aligned} f(x) \ll g(x) &\Longleftrightarrow f(x) = \mathrm{O}(g(x)), \\ f(x) \ll_{\alpha,\beta,\cdots} g(x) &\Longleftrightarrow f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x)) \end{aligned}$$

と十分大きいと云う意味 ($a \ll b$ は b が a に比べて十分大きい sufficiently large を意味する) の 2 通りに使うが混乱 confusion は起きないと考える。

$12 \ll m \in \mathbf{N}$ を一つ固定し，$C_m = m$ (or $m + \frac{1}{2}$) とする。
また，$s = \sigma + it$ ($\frac{1}{2} < \sigma < 1,\ C_{m-1} < t < C_m$) も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。$\mathbf{N} \ni \nu \gg 1$ は十分大きい自然数とする。
$\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero: $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ を，

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \zeta(\rho) = 0,\ C_{m-1} < \gamma < C_m\}$$

で定義する。(ρ_0，β_0，γ_0 は m に依存するから，$\rho_{0,m}$，$\beta_{0,m}$，$\gamma_{0,m}$ と本来書くべきだが煩わしくなるので，このように書いても誤解は生じないはずである。) 従って，領域 $\{w = u + iv |\ \beta_0 < u,\ C_{m-1} < v < C_m\}$ は $\zeta(s)$ の非零領域 zero free region となる。
ρ_+，ρ_-，$\beta_+ > \frac{1}{2}$，$\beta_- > \frac{1}{2}$，γ_+，γ_-，U_m^+，U_m^-，U_m，V_m^+，$V_m^- > 0$
を次で定義する。

$$\begin{aligned} \rho_+ &:= \beta_+ + i\gamma_+,\ \zeta(\rho_+) = 0 \\ &\qquad \gamma_+ := \min\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma_0 < \gamma\} \\ \rho_- &:= \beta_- + i\gamma_-,\ \zeta(\rho_-) = 0 \\ &\qquad \gamma_- := \max\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma < \gamma_0\} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
U_m^+ &:= \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0),\ C_m\} \\
U_m^- &:= \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-),\ C_{m-1}\} \\
U_m &:= \frac{1}{2}\min\{|U_m^+ - \gamma_0|,\ |U_m^- - \gamma_0|, \frac{1}{2}\} \\
V_m^+ &:= \gamma_0 + U_m \\
V_m^- &:= \gamma_0 - U_m
\end{aligned}
$$

ρ_0 の左側：$\Im\rho = \gamma_0$, $\zeta(\rho) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0,\ \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \cdots$$

$$(\frac{1}{2} < \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0,\ \zeta(\rho_i) = 0,\ \Im\rho_i = \gamma_0,\ i = 1, 2, \cdots)$$

とする (ρ_1, $\rho_2, \cdots$ が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする。)。
注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u,\ \gamma_- < v < \gamma_+,\ v \neq \gamma_0\}$ は非零領域 zero free region である。

$s = \sigma + i\gamma_0$, $Y > 1, \delta > 1$ とする。$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選ぶ。
これより,

$$s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0) + i(\gamma_0 - \gamma_0) = \sigma - \beta_0\ ,$$

$0 < \sigma - \beta_0 \ll \dfrac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選んだから

$$\frac{|\rho - s|}{|\rho_0 - s|} > 2 \quad (\rho \neq \rho_0) \quad for\ \ \forall\rho = \beta + i\gamma \qquad \cdots (**)$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero)

である。

このとき，次の定理が成り立つ：

主定理 1

任意の十分大きい $\delta > 1, Y > 1$ を取り固定する。これに対して
For any large fixed $\delta > 1$ *and* $Y > 1$,

$$0 < (\sigma - \beta_0) < \min\left\{\frac{\sigma - \frac{1}{2}}{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})},\ \frac{\sigma}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})},\ \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}\right\}$$

$\cdots(*)$,

となるようにσを選ぶ (これは明らかに可能である。) と,

$$\frac{1}{(\sigma-\beta_0)} \leq \max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となる。

従って，この結論は定理の仮定 $(*)$ と矛盾する。

$0<\sigma'-\beta_0<\sigma-\beta_0$ なる σ より小さい σ' を選べば

$$\frac{1}{(\sigma'-\beta_0)} > \max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{\sigma'-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{\sigma'}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となるかも知れないが，この σ' が

$$0<(\sigma'-\beta_0)<\min\left\{\frac{\sigma'-\frac{1}{2}}{\sqrt{Y'}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}, \frac{\sigma'}{Y'\exp(\frac{3\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}, \frac{U_m}{Y'\exp(\frac{3\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}\right\}\cdots(*')$$

となるように $\delta<\delta'$, $Y<Y'$ を選べば，再び

$$\frac{1}{(\sigma'-\beta_0)} \leq \max\left\{\frac{\sqrt{Y'}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{\sigma'-\frac{1}{2}}, \frac{Y'\exp(\frac{3\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{\sigma'}, \frac{Y'\exp(\frac{3\delta'}{\sigma'-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となり，これは $(*')$ と矛盾する。これは何処までも繰り返される。任意に十分大きい $\delta>1, Y>1$ を固定し (*) を満たす σ に対して，定理は

$$\frac{1}{(\sigma-\beta_0)} \leq \max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

を導くので，ここで $\sigma\to\beta_0$ とすれば，上記左辺は $+\infty$ の発散し右辺は

$$\max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{\beta_0-\frac{1}{2}}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{\beta_0}, \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\beta_0-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

と有限値となり矛盾を引き起こす。

結局 $\rho_0=\beta_0+i\gamma$ with $\beta_0>\frac{1}{2}$ は，もはや $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero とは成り得ない。□

注

$$0 < a, b, c \text{ に対して,} \quad \frac{1}{\min\{a,b,c\}} = \max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\}.$$

上記**主定理 1** を何回 (有限回) か繰り返し使い $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation を使えば

主定理 2 $\zeta(s)$ の全ての複素零点 complex zero $\rho = \beta + i\gamma$ は,

$$\beta = \frac{1}{2}$$

を満たす。□

が得られる。

主定理 1 を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 $\sigma > 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots$ とする。
$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}$$

$m = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} &< m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m \left\{\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\} \\ &\ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} \quad (\text{as } m \to \infty\ ) \end{aligned}$$

が成立する。

証明 先ず $m = 1, 2, \cdots$ のときを考える。
$f(y) := y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y) = y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m - \sigma \log y\}$ であるから, $f'(y_0) = 0$ となるのは, $y_0 = \exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} + \sum_{n=[y_0]+1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} \\ &< \int_2^{[y_0]} \frac{(\log x)^m}{x^{\sigma}} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} + \int_{[y_0]}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^{\sigma}} dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&< \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^\sigma} dx + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\
&\leq m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma} \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m \\
&\leq m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + m!\frac{1}{e}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^m \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m}\left\{\frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}
\end{aligned}
$$

但し，$[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又，

$$
\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq \frac{m!}{e}
$$

を使った。

$m=0$ のときは

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^\sigma} dx = 1 + \frac{1}{\sigma-1}
$$

となり，補題は証明された。□

補題 2　a_i，$c_i = c_i(\nu) \in \mathbf{C}$ ，$f_i(\nu) \to 0\ as\ \nu \to \infty$，$(i=0,1,\cdots,n)$ とする。又，$|a_0| > |a_i|\ (i=1,2,\cdots,n)$ ，$|c_i|^{1/\nu} \to 1\ (i=0,1,2,\cdots,n)\ as\ \nu \to \infty$，$c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$
\lim_{\nu\to\infty} |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^\nu a_i^\nu|^{1/\nu} = \max_{0\leq i\leq n} |a_i| = |a_0|
$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\cdots,n} |a_i/a_0| =: 1/r\ (r>1)$ とおく。

$$
\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)} \to 1,\ |c_i|^{1/\nu} \to 1\ as\ \nu \to \infty,\ (i=1,2,\cdots,n)
$$

また，n が有限 finite であるので, $\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\nu_0$ が存在して,

$$
\left|\frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right| < 1+\epsilon\ \ (i=1,2,\cdots,n)\ for\ \forall\nu > \nu_0
$$

となるが，ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1+\epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned}
& |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^\nu a_i^\nu|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_0}\left(\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right)^\nu\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^\nu\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{O}\left(\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^\nu\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^\nu}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^\nu}\right)\right\}^{R^\nu\cdot\frac{1}{\nu R^\nu}}\right| \\
\to \ & |a_0| \quad (as\ \nu\to\infty)
\end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 3 [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [19], [22], [?]

(0) $$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

(1) $$\log\Gamma(s+1) = -\left[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{s}{(-n)}\right)+\frac{s}{(-n)}\right\}\right],$$

(2) $$\begin{aligned}
&\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) =: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s} = \\
&= -\left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right] \\
&= \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right), \\
&\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\psi(s)^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+n)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots),
\end{aligned}$$

(3) $$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)}e^{(\log 2\pi - 1)s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\prod_{q=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-2q}\right)e^{-\frac{s}{2q}},$$

この対数を取り

(4) $\log\zeta(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right)s - \log(s-1) -$

$-\log 2 - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right] =$

$= (\log 2\pi)s - \log 2 - s - \log(s-1) +$

$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{s}{(-2q)}\right)+\frac{s}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right],$

この対数微分を取り

(5) $\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} -$

$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right] =$

$= \log 2\pi - \left[\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{1}\right] +$

$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s-(-2q)}+\frac{1}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right],$

(6) $\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} +$

$-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(s-(-2q))^{\nu+1}} - \sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots),$

(7) 関数等式 *functional equation* :

$\zeta(1-s) = 2\cos\frac{\pi}{2}s \cdot \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\zeta(s).$

但し，γ_0 は Euler の定数である。

補題 4 ([19] 補題 6.9 系の一般化) $s = \sigma + it \neq 1, \rho, |t| > 2$ として，

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + O(\log t) \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

証明 補題 3,(6) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{[s-(-2q)]^{\nu+1}} - \sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}.$$

上記第 1 項は，$O(t^{-\nu-1})$ である。
上記第 2 項については，$|s+2q|$ は $2q<\max\{-\sigma,0\}$ で q について単調減少，$2q\geq\max\{-\sigma,0\}$ で単調増加であるから

$$
\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{|s+2q|^{\nu+1}}=\left\{\sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}}+\sum_{2q\geq\max\{-\sigma,0\}}\right\}\frac{1}{\{(\sigma+2q)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}}\frac{1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{t^{\nu+1}}+\int_{\frac{\max\{-\sigma,0\}}{2}}^{\infty}\frac{dx}{\{(\sigma+2x)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2}\int_{\max\{-\sigma,0\}}^{\infty}\frac{dy}{\{(\sigma+y)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&\leq\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\{x^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&=\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{tdy}{\{1+y^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}}\\
&<\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu}}\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}\\
&=\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}}+\frac{1}{2t^{\nu}}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{t^{\nu}}\left(\frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t}+\frac{\pi}{4}\right)\\
&\ll\frac{1}{t^{\nu}}
\end{aligned}
$$

第 3 項については，これを 2 つの和に分ける：

$$
\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}=\sum_{|t-\gamma|\leq 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}
$$

この第 2 項を評価する。ここで $t>0$ と仮定しても一般性を失わない。

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\right|\leq\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}}\\
=&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}}<\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
<&\sum_{\gamma<0}\frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1,\gamma>0}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
<&\sum_{\gamma>0}\frac{1}{\gamma^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1,\gamma>0}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}\\
=&\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{m\leq\gamma<m+1}\frac{1}{\gamma^{\nu+1}}+\sum_{m=1,}^{[t]-2}\sum_{m\leq\gamma<m+1,|t-\gamma|>1}\frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{m=[t]+2,\, m\le\gamma<m+1,|t-\gamma|>1}^{\infty}\ \sum \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)\\
<\ &\sum_{m=1}^{\infty}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{m^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{([t]-(m+1))^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\sharp\{\gamma\mid m\le\gamma<m+1\}\frac{1}{(m-([t]+1))^{\nu+1}}+\\
&+\mathrm{O}(\log t)\\
&\quad as\ \ \nu\to\infty,
\end{aligned}
$$

ここで，後の補題５を使った。更に補題５を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\\
\ll\ &\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)
\end{aligned}
$$

また更に補題１を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+\\
&+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t\sum_{l=1}^{[t]-2}\frac{1}{l^{\nu+1}}+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log(l+[t]+1)}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log t+\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&+\log t+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
\ll\ &\log t
\end{aligned}
$$

これより

$$
\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}=\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)
$$

以上から補題は示された。□

補題 5 $N(T):=\sharp\{\rho=\beta+i\gamma\mid\zeta(\rho)=\zeta(\beta+i\gamma)=0,\ 0<\gamma\le T\}$
とすると，

$$
N(T+1)-N(T)<\frac{5}{2}\log T\quad for\ T\gg 1\quad (T\ge e^{100}).
$$

証明 [19] を精密化：補題 3,(2),(5) より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)\\
&=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)-\frac{1}{s-1}+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}\\
\Longleftrightarrow\ &\\
&\frac{1}{2}\left\{\log\frac{s}{2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\frac{s}{2}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\}+\frac{1}{s}\\
&=-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)+\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)-\frac{1}{s-1}+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}\\
\Longleftrightarrow\ &
\end{aligned}
$$

$$\frac{1}{2}\log s - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log s$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{2}\log 2\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|}\right) +$$
$$+ \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log s = \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

ここで $s = (1+\epsilon) + iT$ $(0 < \epsilon)$ と置くと

$$\frac{1}{2}\log((1+\epsilon) + iT)$$
$$= \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}((1+\epsilon) + iT) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT) - \rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon+iT}} + \sum_\rho \left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT) - \rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT) - \rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

この両辺の実部 $\Re$ を取って

$$\frac{1}{2}\log\sqrt{(1+\epsilon)^2 + T^2}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_\rho \Re\left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT) - \rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= \mathrm{O}(1) + \sum_\rho \left\{\frac{1+\epsilon-\beta}{(1+\epsilon-\beta)^2 + (T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right\}$$
$$> \mathrm{O}(1) + \sum_\rho \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + (T-\gamma)^2}$$

$\Longrightarrow$

$$\frac{1}{2}\log T + \frac{1}{4}\log\left(1 + \left(\frac{1+\epsilon}{T}\right)^2\right)$$

$$> \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + (T-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log T > \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + (T-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\frac{1+\epsilon'}{2}\log T \\ &> \sum_{\rho} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + (T-\gamma)^2} \quad \text{with some } \epsilon' > 0 \\ &> \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + 1} = \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2 + 1} \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} &\frac{(1+\epsilon')((1+\epsilon)^2+1)}{2\epsilon}\log T \\ &> \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 = N(T+1) - N(T) \end{aligned}$$

ここで $\epsilon = \sqrt{2}$, $\epsilon' = 0.035533$ と置くと

$$\begin{aligned} \frac{5}{2}\log T &> \frac{(1+\epsilon')((1+\sqrt{2})^2+1)}{2\sqrt{2}}\log T \\ &= \frac{1+0.035533}{2}(4.828427124\cdots)\log T > N(T+1) - N(T) \\ &\quad for\ T \gg 1 \end{aligned}$$

となり証明は終了した。□

補題 6 (Theorem26 of [7] の一般化)
$m \gg 1$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$m - 1 < T_m \le m$ なる T_m が存在して

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)}\right| &\ll (6\log T_m)^{\nu+2} \\ &\ll (6\log m)^{\nu+2} \end{aligned}$$

を満たす。

証明 虚軸方向の区間 $(i(m-1), im]$ を，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 等分すると，補題 5 により，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 個に分割された臨界帯 critical strip:$0 < \sigma < 1$ の小区間には，$\zeta(s)$ の零点 zero を含まないものが少なくとも 1 個ある。この小区間の虚軸方向の 2 等分点を iT_m として，補題 4 を使うと

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT_m)^{(\nu)}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_{|T_m-\gamma|\le 1} \frac{1}{|(\sigma-\beta)+i(T_m-\gamma)|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m)\\
&\ll \sum_{|T_m-\gamma|\le 1} \frac{1}{|T_m-\gamma|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m)\\
&\ll \sum_{|T_m-\gamma|\le 1} \left\{\frac{1}{2}(\frac{5}{2}\log T_m+1)^{-1}\right\}^{-\nu-1} + \mathrm{O}(\log T_m)\\
&\ll \sum_{|T_m-\gamma|\le 1} \{5\log T_m+2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m)\\
&\ll (5\log T_m)\{5\log T_m+2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m) \quad (\textstyle\sum \text{に補題5を使った。})\\
&\ll (6\log T_m)^{\nu+2}\\
&\ll (6\log m)^{\nu+2}
\end{aligned}
$$

となり補題は証明された。□

補題 7　$s=\sigma+it$ を $\zeta(s)$ の正則点として，s に一番近い $\zeta(s)$ の複素零点は１つとして，それを ρ_0 とする。そして $|s-\rho_0|<|s-(-2q)|$ $(q=1,2,\cdots), |s-\rho_0|<|s-1|, |s-\rho_0|\ll 1, |s-\rho_0|<\sigma<|s|$ とする。
このとき

$$
\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}
$$

$t=\gamma_0$のときは

$$
= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log|\gamma_0|}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}
$$

証明 補題4,5より　(as　$\nu\to\infty$)

$$
\begin{aligned}
\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} &= -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t) =\\
&= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t)\\
&= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t)\\
&= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} -
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\leq 1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) + \mathrm{O}\,(\log t)\ ((**)\ \text{による。}) \\
= & -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\leq 1} 1 + \mathrm{O}\,(\log t) \\
= & -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right) \mathrm{O}(\log t) + \mathrm{O}\,(\log t) \\
= & -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right) + \mathrm{O}\,(\log t) \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\,(\log t) \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left((s-\rho_0)^{\nu+1}\log t\right) \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left(2^{-(\nu+1)}\log t\right)\ \ (|s-\rho_0| \ll \frac{1}{2}\text{による。}) \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}
\end{aligned}
$$

$t=\gamma_0$ のときは $s-\rho_0=\sigma-\beta_0$ となるので

$$
\begin{aligned}
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log|\gamma_0|}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \\
= & -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu}}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \quad as\ \nu\to\infty \quad \square
\end{aligned}
$$

補題 8　[10], [11], [19]
$c>0,\ Y>0$ に対して

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Y^w}{w^2}dw = \begin{cases} \log Y, & (1\leq Y) \\ 0, & (0<Y\leq 1) \end{cases}
$$

補題 9（[21] の改変)

$c>0,\ X,Y>1, n\in\mathbf{N}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{\frac{w}{\nu}}w^2\log Y}dw=\begin{cases}1 & ,\quad (n\le X^\nu)\\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right)\le 1, & (X^\nu\le n\le (XY)^\nu)\\ 0 & ,\quad ((XY)^\nu\le n)\end{cases}$$

証明　被積分関数を展開して補題８を使えば良い。□

補題 10

実数上有界な台 $[B,C]$ を持つ複素数値関数 $f(v)=f_1(v)+if_2(v)$,（$f_1(v):=\Re f(v)$, $f_2(v):=\Im f(v)$）の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\exp(ivx)dv\quad\cdots(a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z=x+iy$ に拡張した

$$F(z):=\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\exp(ivz)dv\quad\cdots(b)$$

は $z=x+iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。

注　この補題は、ある意味，弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明　複素解析的ならば実解析的であるから，後者を証明すれば良い。

$$F(z)=F(x+iy)=F_1(z)+iF_2(z)=F_1(x+iy)+iF_2(x+iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(v)\exp(ivz)dv=\int_B^C f(v)\exp(ivz)dv,$$

$$f(v)\exp(ivz)=\{f_1(v)+if_2(v)\}\exp[iv(x+iy)]=$$

$$=\{f_1(v)+if_2(v)\}e^{-vy}\{\cos(vx)+i\sin(vx)\}$$

$$=\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}+i\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}$$

であり，この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}=-\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}=\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=-\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx)-f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}=-\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx)+f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている)，これより

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

主定理 1 の証明

以降，$o(\cdot)$，$O(\cdot)$，$\ll$，$\sim$ 等の記号は $\nu \to +\infty$ のときを考えている。
$s = \sigma + i\gamma_0$，$\frac{1}{2} < \sigma < 1$，$\nu \in \mathbf{N}$，$1 \ll \nu$，$X, Y > 1$，$\delta > 1$ として次の積分を考える：

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s + \frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w - 1)dw}{w^2 \log Y}$$
$$(\frac{1}{2} < \sigma < 1,\ w = u + iv).$$

ここで，後に $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0}$，$\delta > 1$　[23] とする。δ は後に決める。
$\sigma = \Re s > 1$ であるとき，

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}$$

は一様絶対収束するので積分 $\int$ と和 $\sum$ が交換出来て，補題 9 を使うと，この積分 I_ν は

$$I_\nu = \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\infty}\frac{X^w(Y^w - 1)}{n^{w/\nu}}\frac{dw}{w^2 \log Y}$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{n \le (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n,$$
$$where\ \alpha_n := \begin{cases} 1 & ,\quad (n \le X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \le 1, & \quad (X^\nu \le n \le (XY)^\nu) \\ 0 & ,\quad ((XY)^\nu \le n) \end{cases}$$
$$\cdots (1)$$

となる。ここで，$\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数，即ち，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & (n = p^k,\ \text{with some prime } p \text{ and some } k \in \mathbf{N} \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$(-1)^{\nu+1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

である。
ここで積分路を次の $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである：$A > 1$ として

$$\begin{aligned}
&L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5\\
&L_1 = (\nu - i\infty,\ \nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0)],\\
&L_2 = [\nu + i\nu(V_m^- - \gamma_0),\ -A + i\nu(V_m^- - \gamma_0)],\\
&L_3 = [-A + i\nu(V_m^- - \gamma_0),\ -A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)],\\
&L_4 = [-A + i\nu(V_m^+ - \gamma_0),\ \nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0)].\\
&L_5 = [\nu + i\nu(V_m^+ - \gamma_0),\ \nu + i\infty).
\end{aligned}$$

留数定理により，

$$\begin{aligned}
I_\nu &= \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\} +\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} +\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} +\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2)
\end{aligned}$$

を得る。ここで，補題７を使った。また，$\nu \gg 1$ であるので $\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})$ の特異点 $w = \nu(\rho - s)$ は $\Re\nu(\rho - s) \ll -A$ となり，積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w = \nu(\rho - s)$ は存在しない (Fig.1,2 参照)：

$$\begin{aligned}
&\sigma - \frac{A}{\nu} \le \Re\left(s + \frac{w}{\nu}\right) = \sigma + \frac{u}{\nu} \le \sigma + 1\\
&V_m^- \le \Im\left(s + \frac{w}{\nu}\right) = \gamma_0 + \frac{v}{\nu} \le V_m^+
\end{aligned}$$

次に (2) の 5 つの積分を上から評価する。
積分路 L_1 上では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^--\gamma_0)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+1)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|w|^2}dw\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^{\nu+1}}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dv}{\nu^2+v^2}\quad\text{(補題 1 を使った。)}\\
&= \frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}\\
&= (XY)^\nu\frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\ll (XY)^\nu\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\\
&\ll \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \qquad \cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。
積分路 L_5 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^\nu \qquad \cdots(3')
\end{aligned}
$$

積分路 L_2 上では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu+i\nu(V_m^--\gamma_0)}^{-A+i\nu(V_m^--\gamma_0)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+i\gamma_0+\frac{u}{\nu}+\frac{i}{\nu}\nu(V_m^--\gamma_0))^{(\nu)}\right|\times
\end{aligned}
$$

$$\times\frac{(XY)^{\nu}}{|i\nu(V_m^- - \gamma_0)|^2}dw$$
$$\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu}^{-A}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\frac{u}{\nu}+iV_m^-)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^{\nu}}{|\nu(V_m^- - \gamma_0)|^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu}}{\log Y}\int_{\nu}^{-A}\frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu}}{\log Y}(A+\nu)\frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu} \quad \cdots(4)$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu} \quad \cdots(4')$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。$B \gg 1$ として積分路 L_3 を３つ：

$$L_{3,1} := [-A+i\nu(V_m^- - \gamma_0), -A-iB],$$
$$L_{3,2} := [-A-iB, -A+iB],$$
$$L_{3,3} := [-A+iB, -A+i\nu(V_m^+ - \gamma_0)],$$
$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}$$

に分けて評価する。A の値は後に決めるが，その A の値に対して B を定める。
さて

$$\left(s-\rho_0+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

を考える。
仮定している $s-\rho_0=\sigma-\beta_0$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$\left\{s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}$$
$$=\left\{(\sigma-\beta_0)+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}$$
$$=\left\{(\sigma-\beta_0)\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right\}^{\nu+1}$$
$$=(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{\nu+1},$$

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}$$

は $|v| \le B$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)} \\
&=\frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)}\exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \\
&=(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}$$

であり，$|v| \ge B$ のときは，

$$\begin{aligned}
&\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)} \\
&=\left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\left|1+i\frac{v/\{\nu(\sigma-\beta_0)\}}{1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}}\right|^{-(\nu+1)} \\
&\le\left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\cdot 1 \qquad (|x+iy| \ge |x|, x, y \in \mathbf{R}\text{ を使った。}) \\
&\le\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,3}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right| \\
&\le\frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-\gamma_0)}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y} \\
&\le\frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-\gamma_0)}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y} \\
&\le\frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{\left|s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y} \\
&\le\frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2\pi}\int_B^{\nu(V_m^+-\gamma_0)} \frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y} \\
&\le \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_B^{\nu(V_m^+-\gamma_0)}\frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)dv}{(A^2+v^2)} \\
&\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_B^{\infty}\frac{dv}{(A^2+v^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\int_{\frac{B}{A}}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)} \\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\left\{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right\} \\
&\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right) \\
&\left(\ 0<\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\ll\exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\text{ と }B\text{ を選んだ.}\right) \\
&= \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y} \\
&\quad\cdots(5)
\end{aligned}
$$

ここで $w\in L_{3,3}$ であるから，$w=-A+iv=-A+i\nu(y-\gamma_0)$ と置いて，$B\le v\le \nu(V_m^+-\gamma_0)$ より

$$
\begin{aligned}
s+\frac{w}{\nu} &= \sigma+i\gamma_0+\frac{-A+i\nu(y-\gamma_0)}{\nu} \\
&= (\sigma-\frac{A}{\nu})+iy \quad (\frac{B}{\nu}+\gamma_0\le y\le V_m^+).
\end{aligned}
$$

従って，$\rho\ne\rho_0$ なる ρ に対して $w\in L_{3,3}$ であるとき

$$
\begin{aligned}
&\Re\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\sigma+\frac{-A}{\nu}<\sigma, \\
&\gamma_0<\gamma_0+\frac{B}{\nu}\le\Im\left(s+\frac{w}{\nu}\right)=\gamma_0+\frac{v}{\nu}\le V_m^+, \\
&\frac{1}{2}\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho\right|>\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho_0\right|
\end{aligned}
$$

となるので補題７を使ったことに注意すべきである。
$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,1}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right|
$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+i\nu(V_m^- -\gamma_0)}^{-A-iB}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}$$
$$\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$
$$=\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y}$$
$$\cdots(5')$$

となる。
最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$

について詳述する:
$|v|\leq B$ のとき,

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}$$
$$=\frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)}\exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$
$$=(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)$$

であったが，これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)}\ll 1$ である $(\nu\gg 1)$ ので

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}$$
$$=\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\exp\left[(-\nu)\log\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right]$$
$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\times$$
$$\times\exp\left[(-\nu)\left\{\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^2+\cdots\right\}\right]$$
$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\times$$

$$\times \exp\left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)}+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\times$$

$$\times \exp\left[\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$$

$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\times$$

$$\times\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$=\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)$$

である。このことを使って

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}$$

$$=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^{\nu+1}}\times$$

$$\times\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})idv}{(-A+iv)^2\log Y}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$

$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv$$
$$\cdots(\star)$$

$(\star)$ の右辺の積分を

$$F_\nu(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv$$

と置いて

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv$$

とする。

$$\left|\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)\right|$$
$$\leq \frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

をみたし，

$$\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

は可積分 integrable であるので
Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$

である。また補題 10 より
$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。
また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X=0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)idv$$

は $X=0$ を除いて $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu\gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}F_\nu(X)\quad with\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

で $F(X)$ は $X>0$ で実解析的でνに依存しない
複素数値実解析関数である。
$\cdots(6)$

(1), (2), (3), (3′), (4), (4′), (5), (5′), (6), 補題 9, $s=\sigma+it=\sigma+i\gamma_0$ である事を使うと

$$I_\nu\equiv$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n$$
$$=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}+$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}}+\int_{L_{3,2}}+\int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw,$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}}+\int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw-$$
$$-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n+$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\right.$$

$$\left.+\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)\right)-\frac{1}{2\pi i}F_{\nu}(X)\right\}\right]=$$

$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^{\nu}}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^{s}}\alpha_n+$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}$$

$\Longleftrightarrow\clubsuit$

を得る。ここで上記左辺の第 1 項の中：

$$\alpha:=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^{\nu}}\right)\right)$$

が

$$|\alpha|>\frac{3}{4}$$

であるように $A>1$, $Y>1$ を選び (実際の A,B の選び方は第 1 番目に上記のように A を選び，第 2 番目に B を選ぶ。α を定める際，X を変化させずに A を定めることが出来る事に注意すべきである。)，そして

$$\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right\}$$

に関して

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0$$

となるよう

$$X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\ll\frac{1}{\sigma-\beta_0},\ \delta>1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと，定数 constant でないこと (**注 1**) から可能である。また上記

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。
従って上記♣は
♣ $\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}= \\
&=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n+ \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} \\
&\mathit{with}\ \ \alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0,\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X) \\
&\quad\cdots(7)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X) \\
&\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0
\end{aligned}
$$

より，即ち

$$
\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\to\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|>0\ \ as\ \nu\to\infty
$$

より，十分小さい正数 $0<\epsilon_0\ll 1$ を

$$
0<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0
$$

を満たすように選ぶと十分大きい ${}^\forall\nu\gg 1$ に対して

$$
0<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|<\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|+\epsilon_0\cdots(\star\star)
$$

となる。
上記 (7) の左辺の絶対値の $\frac{1}{\nu}$ 乗を考えるが，$(\star\star)$ から

$$
\begin{aligned}
&0<\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\leq \\
&\leq\left\{\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\right\}^{\frac{1}{\nu}}
\end{aligned}
$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}\alpha_n+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2(\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}}\alpha_n^2}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}1^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

(Cauchy − Schwarz − Bunyakowski の不等式を使った. 注 **2**)

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq (XY)^\nu}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\left|\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^\nu}+\right.$$

$$\left.+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\leq \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^\nu}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^\nu+\right.$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\Bigg]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\cdots(8)$$

を得る。(8) をまとめると

$$0<\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\le$$

$$\le\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\Bigg]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\cdots(9)$$

となる。

ここまでは ν は有限値 finite value であった。ここで，$\nu\to\infty$ とすると (9) は補題２を使って

$$0<\frac{1}{\sigma-\beta_0}=\lim_{\nu\to\infty}\left|\frac{1}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}\le$$

$$\le\lim_{\nu\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\Bigg]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$\le\lim_{\nu\to\infty}\left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\left(\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^{\nu}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}+\right.$$

$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^{\nu}\right\}\Bigg]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$

(補題２を使った。)

$$\cdots(10)$$

従って

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0} \leq$$
$$\leq \max\left\{ \left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}} \right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\}$$
$$\cdots(11)$$

が得られる。
(11) で $\sigma-\beta_0>0$ を保ちながら，σ を β_0 に十分近づければ，$\beta_0>\frac{1}{2}$ であるので，(11) の左辺は ∞ に近づき，一方 (11) の右辺は

$$\max\left\{ \left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}} \right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma} \right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m} \right) \right\}\Bigg|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$，$\beta_0>\frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□
注 1：$F(X)$ が定数でないことの証明

$$G(z) := F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) X^{-A} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y} \exp(iv\log X)idv$$
$$= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2} \exp((-A+iv)z)idv$$

$$with \ \ z := \log X$$

$G(z) = constant$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\frac{d}{dz}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)} \exp((-A+iv)z)idv$$
$$= 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp((-A+iv)z)idv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})\exp(ivz)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{-A+iv}\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$
$$= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right) + B\log Y\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\cos(B\log Y) + \cos\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\sin(B\log Y)}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}$$

ここで, $\log Y = 2\pi l,\ l, B \in \mathbf{N}$ とすると

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l}$$

$\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} \neq 0$ であると，σ の値を調節して，出来るので
$\Longleftrightarrow$

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X \gg 1$ であるが，$A \gg 1$ であるので
$\Longleftrightarrow$

$$1 \ll e^{2\pi l A} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi l}, l \in \mathbf{N}, 1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq constant.$ $\square$

注２：Hölder の不等式を使わず Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使う理由

(8),(9) を得るとき，

$$\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}\alpha_n$$

に Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式を使って

$$\left[\frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^\sigma}\alpha_n\right]^{\frac{1}{\nu}} \leq$$

$$\leq \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n\leq(XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)^2(\log n)^{2\nu}}{n^{2\sigma}}\alpha_n^2}\sqrt{\sum_{n\leq(XY)^\nu} 1^2}\right]^{\frac{1}{\nu}}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\frac{1}{\nu!}\sqrt{(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\sqrt{\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\sqrt{\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)}{(2\sigma-1)^3}}\sqrt{(XY)^{\nu}}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{\nu}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\to \frac{\sqrt{XY}}{\sigma-\frac{1}{2}} \quad as\ \nu\to\infty \quad (a),\ X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

これに対して Hölder の不等式を使うと ($\mu>1,\ \frac{1}{\mu}+\frac{\mu-1}{\mu}=1$)

$$
\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^{\nu}}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^{\sigma}}\alpha_n\right]^{\frac{1}{\nu}} \le \\
&\le \left[\frac{1}{\nu!}\left\{\sum_{n\le(XY)^{\nu}}\frac{\Lambda(n)^{\mu}(\log n)^{\mu\nu}}{n^{\mu\sigma}}\alpha_n^{\mu}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\left\{\sum_{n\le(XY)^{\nu}}1^{\frac{\mu}{\mu-1}}\right\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\frac{1}{\nu!}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\frac{1}{\nu!}\left\{(\mu(\nu+1))!\left(\frac{1}{\mu\sigma-1}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\le \left[\left\{\frac{(\mu(\nu+1))!}{(\nu!)^{\mu}}\left(\frac{1}{\mu\sigma-1}\right)^{\mu(\nu+1)+1}\right\}^{\frac{1}{\mu}}\{(XY)^{\nu}\}^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right]^{\frac{1}{\nu}} \\
&\to \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}} \quad as\ \nu\to\infty \quad (b),\ X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

($\Gamma(s)$ に関する Stirlingの公式を使った.)

以上から次が云える。

補題 11 $\sigma > \frac{1}{2}$, $\mu > 2$ に対して,

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma - \frac{1}{2}} < \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}.$$

証明 $\frac{1}{\mu} =: x$ として,

$$f(x) := \frac{(XY)^{1-x}}{\sigma - x} \quad (0 < x \leq \frac{1}{2})$$

の増減を調べる。

$$f'(x) = \frac{(XY)^{1-x}}{(\sigma - x)^2}\{-(\sigma - x)\log XY + 1\}$$

より

$$f'(x_0) = 0 \Longleftrightarrow x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$$

となるので以下に増減表を作ると $(\frac{1}{2} < \sigma < 1)$

x	0		$x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY}$		σ
f'		$-$	0	$+$	
f	$\frac{XY}{\sigma}$	$\searrow$	$(\log XY)(XY)^{1-\sigma+\frac{1}{\log XY}}$	$\nearrow$	$+\infty$

X, Y は大きい値を取る事が出来るので

$$x_0 = \sigma - \frac{1}{\log XY} > \frac{1}{2}$$

とする事が出来る。従って

$$\min_{0<x\leq\frac{1}{2}} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right)$$

即ち $\min_{\mu\geq 2} f(\frac{1}{\mu})$ を与える μ は $\mu = 2$ である。□

$\sigma > \frac{1}{2}$, $\mu \geq 2$ **の場合** $\mu = 2$ **でなければならない理由**

補題 11 より $\mu > 2$ のとき

$$\frac{\sqrt{XY}}{\sigma - \frac{1}{2}} < \frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}.$$

であるが，ここで $\sigma \to \frac{1}{2}+0$ のとき，上記
左辺 the left-hand side→ $+\infty$, 右辺 the right-hand side→ 有限値 finite value となり矛盾 contrdiction が生ずるので, これを救う為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right),\ \mu = 2$$

とするか，分母の $\mu = 2$ 即ち

$$\frac{(XY)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}} \to \frac{(XY)^{1-\frac{1}{2}}}{\sigma - \frac{1}{2}}$$

とする必要性が出て来る。

$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right), \mu \geq 2, \sigma > \frac{1}{2}$ の分母 $\sigma - \frac{1}{\mu}$ の必要性

$(a), (b)$ を導く際

$$\sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}} \sim \int_1^{(XY)^\nu} \frac{(\log x)^{\mu(\nu+1)}}{x^{\mu\sigma}} dx =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \int_0^{\mu\nu(\sigma-\frac{1}{\mu})\log XY} y^{\mu(\nu+1)+1-1} e^{-y} dy =$$

$$= \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right)^{\mu(\nu+1)+1} \gamma(\mu(\nu+1)+1, \mu\nu\left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right)\log XY)$$

($\gamma(a, z)$ は不完全 $gamma$ 関数)

この $\gamma(\mu(\nu+1)+1, \mu\nu\left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right)\log XY)$ が
$\sigma \to \frac{1}{2}+0$ のときでも

$$\gamma(\mu(\nu+1)+1, \mu\nu\left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right)\log XY) \neq o(\Gamma(\mu(\nu+1)+1)) \quad as\ \nu \to \infty,$$

$$\gamma(\mu(\nu+1)+1, \mu\nu\left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right)\log XY) \sim \Gamma(\mu(\nu+1)+1) \quad as\ \nu \to \infty$$

となる為には

$$\lambda := \frac{\mu\nu\left(\sigma - \frac{1}{\mu}\right)\log XY}{\mu(\nu+1)+1} > 1$$

が必要である [23]。
これを満たす為には

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right), \quad \mu \geq \mu' \geq 2$$

の形 form が必要である。

更に以下が云える。

(イ) $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ の場合

(イ-1) $\frac{1}{2} < \beta_0 < \sigma < 1$ の場合
(b) で

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^{\mu(\nu+1)}}{n^{\mu\sigma}}$$

が収束する為には $\frac{1}{\mu} < \sigma$ が必要である。
考えている領域で $i\gamma_0$ 水平線上にあると仮定する $\zeta(s)$ の零点を $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ とすると $\sigma > \beta_0 > \frac{1}{\mu}$ ($\mu > 2$ でも良い) であれば，(b) と，(11) を導いた方法により (11) と同様に

$$\frac{1}{\sigma - \beta_0} \leq$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$
$$\cdots (11')$$

が得られる。ここで $\sigma \to \beta_0$ とすれば，(11) の左辺は $+\infty$ に発散し，右辺は有限値となり矛盾を引き起こす。従って仮定した $\zeta(s)$ の零点 $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ は存在しない。
以下のように複数の $1 < \mu \leq 2$ なる μ が取れるが, $\mu = 2$ とすれば良い:
考えている領域で $i\gamma_0$ 水平線上にあると仮定する $\zeta(s)$ の有限個 (n 個) の零点を

$$\rho_0^{(1)} = \beta_0^{(1)} + i\gamma_0,\ \rho_0^{(2)} = \beta_0^{(2)} + i\gamma_0,\ \cdots,\ \rho_0^{(n)} = \beta_0^{(n)} + i\gamma_0,$$
$$\sigma_1 > \beta_0^{(1)} > \frac{1}{\mu_1} \geq \sigma_2 > \beta_0^{(2)} > \frac{1}{\mu_2} \geq \sigma_3 > \beta_0^{(3)} > \frac{1}{\mu_3} \geq \cdots \sigma_n > \beta_0^{(n)} > \frac{1}{2},$$
$$X_1 \leq X_2 \leq X_3 \leq \cdots \leq X_n,\ Y_1 \leq Y_2 \leq Y_3 \leq \cdots \leq Y_n$$

とすると，次々と矛盾を来たし，結局

$$\rho_0^{(1)} = \beta_0^{(1)} + i\gamma_0,\ \rho_0^{(2)} = \beta_0^{(2)} + i\gamma_0,\ \cdots,\ \rho_0^{(n)} = \beta_0^{(n)} + i\gamma_0$$

は $\zeta(s)$ の零点でない事が分かる。

(イ-2) $\frac{1}{2} = \beta_0 < \sigma < 1$ **の場合** $(\mu > 2)$

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma - \frac{1}{\mu}}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$
$$\cdots (11'')$$

となるか or

$$\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}} \leq$$
$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)\right)^{1-\frac{1}{2}}}{\sigma - \frac{1}{2}}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{\mu'}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$
$$\cdots (11''')$$

となり，$\sigma \to \frac{1}{2} + 0$ のとき，$(11''), (11''')$ の左辺 $\to +\infty$, $(11''), (11''')$ の右辺 $\to +\infty$ となって，何ら矛盾は生じない。

(ロ) $1 < \sigma \leq \frac{1}{2}$ **の場合**

(ロ-1) $\frac{1}{2} + i\gamma_0$ **が** $\zeta(s)$ **の正則点のとき**

(イ) と同様，$\frac{1}{2} \geq \sigma > \beta_0 > \frac{1}{\mu}$, $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ を $\zeta(s)$ の零点と仮定すると $\sigma \to \beta_0$ のとき矛盾を生じ $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ は $\zeta(s)$ の零点ではあり得ない。これは，(イ) の結果から $\sigma + i\gamma_0$ $(\sigma > \frac{1}{2})$ が零点ではないと云う事と $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation, $\zeta(s) \in \mathbf{R}\ for\ s \in \mathbf{R}$ からも云える。従って (イ) の結果より $i\gamma_0$ 水平線上に $\zeta(s)$ の零点は存在しない。

(ロ-2) $\frac{1}{2}+i\gamma_0$ **が** $\zeta(s)$ **の零点のとき**

(イ)の結果から $\sigma+i\gamma_0$ $(\sigma>\frac{1}{2})$ が零点ではないと云う事と $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation, $\zeta(s)\in\mathbf{R}$ for $s\in\mathbf{R}$ より，$\sigma+i\gamma_0$ $(\frac{1}{2}>\sigma>0)$ も零点ではない。従って(イ)の結果より $i\gamma_0$ 水平線上に $\frac{1}{2}+i\gamma_0$ 以外に $\zeta(s)$ の零点は存在しない。この場合 $0<\sigma<\frac{1}{2}$ で積分路 $L=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$ の右側に特異点 $w=\nu((\frac{1}{2}+i\gamma_0)-s)=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)$ が現れ，その留数は後に証明する補題12より

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}$$
$$\ll\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}.$$

であるので(2)は

$$\begin{aligned}
I_\nu&=\operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}+\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}\right)+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2')
\end{aligned}$$

となり，従って(7)は

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{(\sigma-\frac{1}{2})^{\nu+1}}\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}=\\
&=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}\right)+\\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}})}{U_m}\right)^\nu\right\}
\end{aligned}$$

$$with\ \ \alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X) \neq 0,\ \lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X) \quad \cdots (7')$$

となる。この右辺第 1 項に Hölder の不等式を適用すると $(\frac{1}{\mu} < \sigma < \frac{1}{2})$

$$\frac{1}{\frac{1}{2}-\sigma} \leq$$

$$\leq \max\left\{\left(\frac{\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right)\right)^{1-\frac{1}{\mu}}}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right),\ \left(\frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)}}{(\frac{1}{2}-\sigma)}\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right)}{\sigma}\right),\ \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right)}{U_m}\right)\right\},\ X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{\mu}}\right). \quad \cdots (11''')$$

が得られるが $\sigma \to \frac{1}{2}$ としても何の矛盾も生じない。□

補題 12　$0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + i\gamma_0$ が $\zeta(s)$ の零点であるとき

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)} \left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}$$
$$\ll \frac{(XY)^{2(\frac{1}{2}-\sigma)\nu}}{(\frac{1}{2}-\sigma)^{\nu+2}\log Y}.$$

証明

補題 6,(i) の

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)} = \frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-1)^{\nu+1}} -$$
$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-(-2n))^{\nu+1}} -$$
$$-\sum_{\rho}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbf{N}).$$

より

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)} \left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\} =$$

$$
\begin{aligned}
&= (-\nu^{\nu+1})\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left[\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right]_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&= -\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\frac{d^{\nu-k}}{ds^{\nu-k}}\{X^w(Y^w-1)\}\Big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&= -\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\times\\
&\times\{(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w-(\log X)^{\nu-k}X^w\}\Big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&\ll \frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!(\nu-k)!}(k+1)!|w|^{-2-k}\,(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w\Big|_{w=\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&\ll \frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{k+1}{(\nu-k)!}\left|\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\right|^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&\ll \frac{1}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(\frac{1}{2}-\sigma)}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\sum_{l=0}^{\nu}\frac{1}{l!}\nu^{l}\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{l}(\log XY)^{l}\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\times\\
&\times\left[\exp\{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log(XY)\}-\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{l!}(\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log XY)^l\right]\\
&\ll \frac{(XY)^{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\exp\left\{\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)\log(XY)\right\}\\
&\ll \frac{(XY)^{2\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}\ll\frac{(XY)^{2\nu\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}}{\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)^{\nu+2}\log Y}.
\end{aligned}
$$

□
以上が **Hölder** の不等式を使わず **Cauchy-Schwarz-Bunyakowski** の不等式を使う理由である。□

注 3： 主定理 1 の仮定 (*) について
主定理内の仮定：

任意の十分大きい$\delta > 1, Y > 1$を取り固定する。これに対して
For any large fixed $\delta > 1$ *and* $Y > 1$,

$$0 < (\sigma - \beta_0) < \min\left\{\frac{\sigma - \frac{1}{2}}{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}, \frac{\sigma}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}, \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}\right\} \cdots (*),$$

で，この右辺の分母内$\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})$, $\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})$ に現れる$\sigma - \frac{1}{2}$は上記仮定 $(*)$ を満たす$\sigma(> \beta_0)$が存在する限り，有効である。一般に定理の仮定は，その仮定が成立すれば，その仮定は自由に設定できるからである。即ち$\sigma - \frac{1}{\mu}$とする必要はない。

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ **の選び方**
$X = \exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}, Y = e^{2\pi l}, A,\ l, B \in \mathbf{N}, \sigma - \beta_0$ は次の条件 (a),(b),(c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi l}\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}} \cdots (a)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \cdots (b)$$

$$|\alpha| = \left|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \mathrm{O}\left(\frac{\log\gamma_0}{2^\nu}\right)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right| > \frac{3}{4} \cdots (c)$$

満たすが，先ず (a) を満たすように$\sigma - \beta_0$を選び，次に (c) を満たすようにAを選んでから, (b) を満たすようにBを選ぶ。

主定理 2 の証明
mを固定して主定理 1 を繰り返し適用すると，
$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$内にある零点ρ_0の実部β_0は次第に小さくなり，
非零領域 zero free region：

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

は，左方向に広がって行き，遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。
主定理は次の結論を導いている。即ち，存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず，$\frac{1}{2} < \sigma$ となる $\zeta(s)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば，結局 $\zeta(s)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。
$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので，この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。
従って $\beta_0 > \frac{1}{2}$ となり得ない。また $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の関数等式 functional equation により，$0 < \beta_0 < \frac{1}{2}$ でもあり得ず，$\beta_0 = \frac{1}{2}$ となる。□
追記 本論文の方法を [18] の**補題 6Lemma6:**
$s = \sigma + it \neq \rho, -2q, 1$ (ρ は $\zeta(s)$ の複素零点，$q = 1, 2, \cdots$) に対して，

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{w=0}\left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)\frac{X^w}{w^{\nu+1}}\right\} \\
= \;& \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left(-\frac{\zeta'}{\zeta}(s+w)X^w\right)\Bigg|_{w=0} \\
= \;& \sum_{n\le X}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{1}{\nu!}\log^\nu\left(\frac{X}{n}\right) + \sum_\rho \frac{X^{\rho-s}}{(\rho-s)^{\nu+1}} + \sum_{q=1}^{\infty}\frac{X^{-2q-s}}{(-2q-s)^{\nu+1}} - \frac{X^{1-s}}{(1-s)^{\nu+1}}.
\end{aligned}$$

の左辺に Cauchy-Hadamard の公式を使い，更に本論文の方法を適用する事により同じ結果が得られる事が分かった。詳しくは
鹿児島経済論集，第 63 巻 4 号, 2023 年 2 月, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, February 2023.
で述べる。

参考文献

[1] Apostol,T.M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[2] Chandrasekharan,K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.

[3] Davenport,H: *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)

[4] Estermann,T.: *Introduction to Modern Prime Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1961.

[5] Huxley,M.N.: *The Distribution of Prime Numbers* (*Large seives and zero-density theorems*), Oxford, Clarendon Press, 1972.
(p.54(12.39) $e^{B(x)s} \to e^{B(\chi)s}$, (12.40) $\frac{1}{2}\log 2\pi \to \frac{1}{2}\log\pi$ とすべきである。p.56 (13.6) もそうである。)

[6] 一木正幸 Ichinoki,M.:『素数定理；その解析的証明』丸善出版サービスセンター，2003.
The Prime Number Theorem; its analytical proofs, Maruzen Publish Service Center, 2003.

[7] Ingham,A.E.: *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.

[8] Karatsuba,A.A. (translated by Nathanson,M.B.): *Basic Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, traslation from the original Russian ed.: Osnovy analiticheskoj teorii chisel, 2nd ed., Nauka, Moscow 1983.

[9] Kowalski,E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.

[10] Landau,E.: *Handbuch der Leher von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 66, 87, 88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]

[11] 三井孝美 Mitsui,T.:『整数論；解析的整数論入門』至文堂，1970.
Number Theory; *Introduction to Analytic Number Theory* (in Japanese)，Shibunndo, Tokyo, 1970.

[12] Montgomery,H.L.: *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, AMS, 1994.

[13] Montgomery,H.L. and Vaughan,R.C.: *Miltiplicative Number Theory* I. *Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, 2007.

[14] 本橋洋一 Motohashi,Y.:『解析的整数論 I—素数分布論—』, 朝倉書店，2009, *Analytic Number Theory I –Theory of Prime Number Distribution–*, Asakura-Shoten, Tokyo, 2009.

[15] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III: 補遺); 実軸上或いは実軸近くの零点, A Mean Value Integral(III:Appendix); Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Riemann Zeta-Function, 鹿児島経済論集, 第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 265-303, *The Kagoshima Journal of Economics,* **60**, December 2019, 265-303 .

[16] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Riemann 予想の証明に就いて On a Proof of the Riemann Hypothesis, 鹿児島経済論集, 第 63 巻 1 号, 2022 年 6 月, 1-39, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, June 2022, 1-39. **訂正 Correction:p.19,l.4** $\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\nu},\chi) \to \frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})$

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Riemann 予想の証明に就いて [II] On a Proof of the Riemann Hypothesis [II], 鹿児島経済論集, 第 63 巻 2 号, 2022 年 8 月, 57-93, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, August 2022, 57-93.
訂正 Correction:p.68, ↑ l.5 補題 7→ 補題 5
訂正 Correction:p.81, ↑ l.4,2
$\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\nu},\chi) \to \frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})$, $\int\int_{L_{3,2}} \to \int_{L_{3,2}}$
訂正 Correction:p.81, ↑ l.1,p.82, ↓ l.5
$\chi(n)$ should be deleted
訂正 Correction:p.81, ↑ l.1,p.93,Fig.1
The points $-A, O, \nu$ should be the mid-point of the lines $L_3, \overline{i\nu(V_m^+-\gamma_0), i\nu(V_m^--\gamma_0)}, L_1L_5$ respectively, So the u-axis is midline between the line L_2 and the line L_4 and parallel to L_2 and L_4.

[18] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: トゥラン Turán の素数に関する明示公式の別証明 Another Proof of Turán's Explicit Formula for Primes, 鹿児島経済論集, 第 63 巻 2 号, 2022 年 8 月, 95-121, *The Kagoshima Journal of Economics,* **63**, August 2022, 95-121.

[19] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』, 丸善出版, 訂正版 2014, 2012, 『素数定理の進展・下』, 丸善出版, 2013)

[20] Rademacher,H.: *Topics in Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[21] Selberg,A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.

[22] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese)，Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[23] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[24] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

(received 23 September 2022.)

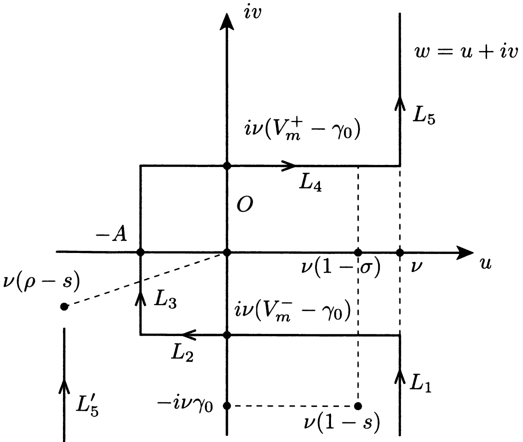

Fig. 1

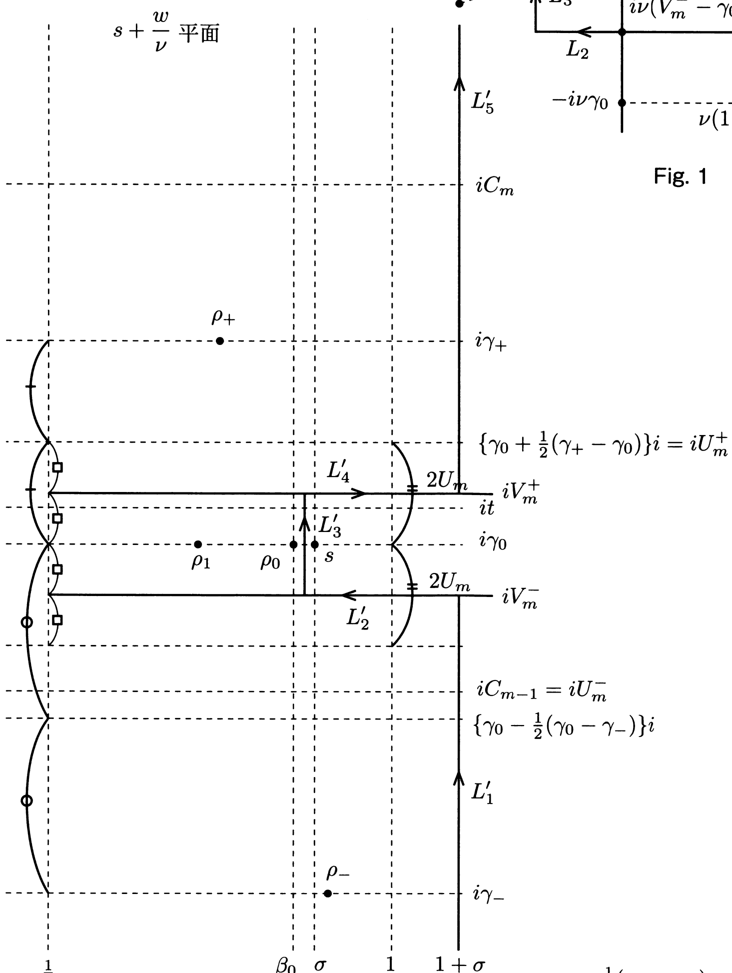

Fig. 2　$\left.\begin{array}{l} \gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-) < C_{m-1} \\ \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0) < C_m \end{array}\right\}$ の場合