Eulerの$\Gamma(s)$の発見的導出
A Heuristic Derivation of Euler's $\Gamma(s)$

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract
We give here a heuristic derivation of Euler's gamma function $\Gamma(s)$.

Key words ; Euler's $\Gamma(s)$.
Mathematics Subject Classification 2020;　33MB15.

$s=\sigma+it,\ w=u+iv\in\mathbf{C}$とする。又，$\Gamma(w)$はEulerのgamma関数である。

Eulerの積分によるgamma関数$\Gamma(s)$の定義：

$$\Gamma(s):=\int_0^\infty x^s e^{-x}\frac{dx}{x},\ (\Re s>0)\quad\cdots(0)$$

は階乗factorial:$n!$の一般化であるが，その積分の形からは$n!$を想起しない。無限積infinite productによるgamma関数$\Gamma(s)$の定義(Euler,Gauss, Weierstrass)もあるが尚更想起できない。

そこで，この小論では$n!$を想起できる自然と思われる定義をし，しかしこの途中でHankel(径路)積分が発散してしまうので，少々姑息ではある

が変数 s を $-s$ と変える必要がある。
e^w の $w=0$ での Maclaurin-Taylor 展開：

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} w^n \quad (|w| < \infty)$$

と Cauchy の積分公式を使って

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\epsilon>0} \frac{e^w}{w^{n+1}} dw \cdots (1)$$

となる。ここで自然数 $n \in \mathbf{N}$ を複素数 $s \in \mathbf{C}$ に拡張 extend する。これは解析接続 analytic continuation である[1]。即ち，(1) は形式的に

$$\frac{1}{s!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\epsilon>0} \frac{e^w}{w^{s+1}} dw \quad (\Re s > 0) \cdots (1')$$

となるが，この右辺は s の解析関数 analytic function である ($\{w||w| = \epsilon\}$ のうち w の負軸を除く）。(1′) に Cauchy の積分定理を適用して Hankel 積分 (径) 路：

$$H := \lim_{\epsilon \to +0} (\infty e^{-i\pi}, \epsilon e^{-i\pi}] \cup \{\epsilon e^{i\theta} \mid -\pi \leq \theta \leq \pi\} \cup [\epsilon e^{+i\pi}, \infty e^{+i\pi})$$

Fig.1:
に積分路を変形すると, 分母の $\frac{1}{w^{s+1}}$ により発散 diverge してしまう。
そこで，この困難 difficulty を避ける為に s を $-s$ $(\Re s > 0)$ に変える：

$$\begin{aligned} \frac{1}{(-s)!} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\epsilon>0} \frac{e^w}{w^{-s+1}} dw \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=\epsilon>0} e^w w^{s-1} dw \quad (\Re s > 0) \cdots (2) \end{aligned}$$

(2) を上記 Hankel 積分路上に移して計算すると

$$\begin{aligned} (2) &= \lim_{\epsilon \to +0} \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{\infty e^{-i\pi}}^{\epsilon e^{-i\pi}} + \int_{|w|=\epsilon>0} + \int_{\epsilon e^{+i\pi}}^{\infty e^{+i\pi}} \right\} e^w w^{s-1} dw \\ &= \end{aligned}$$

[1] 解析接続 analytic continuation は冪級数 power series による方法，鏡像の原理 reflection principle, 関数等式 functinal equation による方法等があるが本質は，代入 substitution である。勿論解析性 analysity は維持されなければならない。

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\epsilon}\exp(re^{-\pi i})(re^{-\pi i})^{s-1}d(re^{-\pi i}) + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon}^{\infty}\exp(re^{+\pi i})(re^{+\pi i})^{s-1}d(re^{+\pi i}) + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(\epsilon e^{i\theta})(\epsilon e^{i\theta})^{s-1}d(\epsilon e^{i\theta}) \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}e^{-\pi is}\frac{1}{2\pi i}\int_{\infty}^{\epsilon}\exp(-r)r^{s-1}dr + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}e^{+\pi is}\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon}^{\infty}\exp(-r)r^{s-1}dr + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon^{s}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(\epsilon e^{i\theta})e^{i\theta s}id\theta \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}e^{-\pi is}\frac{-1}{2\pi i}\int_{\epsilon}^{\infty}\exp(-r)r^{s-1}dr + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}e^{+\pi is}\frac{1}{2\pi i}\int_{\epsilon}^{\infty}\exp(-r)r^{s-1}dr + \\
&\quad + \lim_{\epsilon\to+0}\epsilon^{s}\int_{-\pi}^{+\pi}\exp(\epsilon e^{i\theta})e^{i\theta s}id\theta \\
&= \frac{e^{+\pi is}-e^{-\pi is}}{2i}\frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to+0}\int_{\epsilon}^{\infty}e^{-r}r^{s-1}dr + 0 \\
&= \frac{\sin\pi s}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-r}r^{s-1}dr \cdots (2')
\end{aligned}
$$

ここで相反公式 reflection formula を思い出して $(2')$ の最右辺の積分を $\Gamma(s)$ と定義すると

$$
\frac{1}{(-s)!} = \frac{\sin\pi s}{\pi}\int_{0}^{\infty}e^{-x}x^{s}\frac{dx}{x} =: \frac{\sin\pi s}{\pi}\Gamma(s) \quad \cdots (3)
$$

が得られる。この (3) の $\Gamma(s)$ の定義は Euler の積分による定義 (0) と一致している。

(3) の積分を部分積分する事により関数等式 functional equation:

$$
\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \cdots (4')
$$

を得るが，$(4')$ により解析接続 analytic continuation をする事により $(4')$ は $\Gamma(s)$ の特異点 singular point[2] を除き全平面 $\mathbf{C}$ で $(4')$ は成り立つ：

$$
\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \text{ for all } s \in \mathbf{C} \text{ except singular points of } \Gamma(s) \cdots (4)
$$

[2] $\Gamma(s)$ の特異点は $s = 0, -1, -2, \cdots$ である。

(4) を繰り返し使うと $\Gamma(s+1) = s(s-1)(s-2)(s-3)\cdots$ となり $s \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ の場合に階乗 factorial の一般化となっている事が分かる。このことを使うと $(-s)! = \Gamma(1-s)$ となるべきであるから，(3) より

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(s) \quad \cdots (5')$$

となるが，これは相反公式 reflection formula：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \ for\ {}^{\forall}s \notin \mathbf{Z} \quad \cdots (6)$$

であり，$\Gamma(s)$ の定義：

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^s e^{-x} \frac{dx}{x},\ (\Re s > 0) \quad \cdots (0)$$

も同時に得られた[3]。

附録：相反公式 Reflection Formula：

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \ \ for\ \mathbf{C} \ni s \notin \mathbf{Z} \cdots (6)$$

の証明

次の証明の初出は不明であるが著者のメモに証明の方針が数式抜きで書かれており，それを再現する。この証明自体に価値があると思われ，しかも初等的である。contour 積分 (Hankel 路)，二重積分の妙技を味わえる。

件の公式は，$0 < s < 1$ で証明出来れば，あとは解析接続により全複素平面 $s \in \mathbf{C}$ で成立する。

$0 < s < 1$ とする。

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx \int_0^\infty e^{-y} y^{(1-s)-1} dy =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x+y)} x^{s-1} y^{-s} dx dy$$

---

[3] 実は Hankel(1863) により

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_H w^{-s} e^w dw, \quad for\ {}^{\forall}s \in \mathbf{C}$$

が得られている。

$u := x + y$ と変数変換すると：$Fig.2$

$$= \int_0^\infty e^{-u} \int_0^u x^{s-1}(u-x)^{-s} dx du$$

次に $x = uz$ と変数変換すると

$$= \int_0^\infty e^{-u} u^{s-1} u^{-s+1} \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-s} dz du$$

$$= \int_0^\infty e^{-u} du \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-s} dz$$

$$= 1 \cdot \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-s} dz$$

$$= \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-s} dz \ (\ = \Gamma(s + (1-s))B(s, 1-s)\ )$$

$B(p,q)$ は $beta$ 関数 : $B(p,q) := \int_0^1 z^{p-1}(1-z)^{q-1} dz \ for \ \Re p, \Re q > 0$

以上まとめると

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^1 z^{s-1}(1-z)^{-s} dz \ for \ 0 < s < 1 \ \cdots (7)$$

次の積分路 (変形 Hankel 路)：Fig.3

$$H' := C_0 \cup C_- \cup C_1 \cup C_+,$$

$$C_0 := \lim_{\epsilon \to +0} C_0(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to +0} \{\ \epsilon e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 1 \gg \epsilon > 0\ \},$$

$$C_- := \lim_{\epsilon \to +0} C_-(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to +0} \{\ r e^{2\pi i} \mid 0 < \epsilon \leq r \leq 1 - \epsilon < 1\ \},$$

$$C_1 := \lim_{\epsilon \to +0} C_1(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to +0} \{\ 1 + \epsilon e^{i\theta} \mid -\pi \leq \theta \leq \pi,\ 1 \gg \epsilon > 0\ \},$$

$$C_+ := \lim_{\epsilon \to +0} C_+(\epsilon) := \lim_{\epsilon \to +0} \{\ r e^{0 \cdot i} \mid 0 < \epsilon \leq r \leq 1 - \epsilon < 1\ \}.$$

上の積分

$$\int_{H'} z^{s-1}(1-z)^{-s} dz \ \cdots (8)$$

を計算する：

$$\int_{H'} z^{s-1}(1-z)^{-s} dz = \left\{ \int_{C_0} + \int_{C_-} + \int_{C_1} + \int_{C_+} \right\} z^{s-1}(1-z)^{-s} dz =$$

$$= \lim_{\epsilon \to +0} \left\{ \int_0^{2\pi} (\epsilon e^{i\theta})^{s-1}(1 - \epsilon e^{i\theta})^{-s} d(\epsilon e^{i\theta}) + \right.$$

$$+ \int_\epsilon^{1-\epsilon} (r e^{2\pi i})^{s-1}(1 - r e^{2\pi i})^{-s} d(r e^{2\pi i}) +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \epsilon e^{i\theta})^{s-1}(1 - (1 + \epsilon e^{i\theta}))^{-s} d(\epsilon e^{i\theta}) +$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{1-\epsilon}^{\epsilon}(re^{0\cdot i})^{s-1}(1-re^{0\cdot i})^{-s}d(re^{0\cdot i})\Big\} = \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\Big\{\int_0^{2\pi}\epsilon^{s-1}e^{i\theta(s-1)}\mathrm{O}(1)\epsilon i e^{i\theta}d\theta + \\
&+\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} r^{s-1}e^{2\pi i(s-1)}(1-r)^{-s}e^{2\pi i}dr + \\
&+\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{O}(1)\epsilon^{-s}e^{-i\theta s}\epsilon i e^{i\theta}d\theta + \int_{1-\epsilon}^{\epsilon} r^{s-1}(1-r)^{-s}dr\Big\} = \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\Big\{\mathrm{O}\left(\epsilon^s\int_0^{2\pi}e^{i\theta s}d\theta\right) + e^{2\pi is}\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} r^{s-1}(1-r)^{-s}dr + \\
&+\mathrm{O}\left(\epsilon^{1-s}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{O}(1)e^{i\theta(1-s)}d\theta\right) + \int_{1-\epsilon}^{\epsilon} r^{s-1}(1-r)^{-s}dr\Big\} = \\
&= \lim_{\epsilon\to+0}\Big\{\mathrm{O}\left(\epsilon^s+\epsilon^{1-s}\right) + (e^{2\pi is}-1)\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} r^{s-1}(1-r)^{-s}dr\Big\} = \\
&= 0 + (e^{2\pi is}-1)\int_0^1 r^{s-1}(1-r)^{-s}dr = \\
&= (e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\Gamma(1-s) \quad \text{((7) による.)}
\end{aligned}
$$

故に

$$
\int_{H'} z^{s-1}(1-z)^{-s}dz = (e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\Gamma(1-s) \ \cdots (9)
$$

更に (9) の左辺の積分を別の方法：Cauchy の定理を使って計算する。
積分路：

$$
C_R := \{\ Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le 2\pi,\ R \gg 1\ \}
$$

とすると，Cauchy の定理より

$$
\int_{H'} z^{s-1}(1-z)^{-s}dz = \int_{C_R} z^{s-1}(1-z)^{-s}dz \quad \cdots (10)
$$

である。(10) の右辺の積分の $R \to +\infty$ のときの値を計算する：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R} z^{s-1}(1-z)^{-s}dz = \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}(Re^{i\theta})^{s-1}(1-Re^{i\theta})^{-s}d(Re^{i\theta}) = \\
&= \lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}R^{s-1}e^{i\theta(s-1)}R^{-s}e^{-i\theta s}(\frac{1}{Re^{i\theta}}-1)^{-s}Re^{i\theta}id\theta = \\
&= i\lim_{R\to+\infty}\int_0^{2\pi}(\frac{1}{Re^{i\theta}}-1)^{-s}d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= i \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} (-1)^{-s}(1-\frac{1}{Re^{i\theta}})^{-s} d\theta \\
&= ie^{+\pi is} \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} (1-\frac{1}{Re^{i\theta}})^{-s} d\theta \\
&= ie^{+\pi is} \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2\pi ie^{+\pi is} \quad \cdots (11)
\end{aligned}
$$

(9),(10),(11) より

$$(e^{2\pi is}-1)\Gamma(s)\Gamma(1-s) = 2\pi ie^{+\pi is}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{2\pi ie^{+\pi is}}{e^{2\pi is}-1} = \frac{\pi}{\frac{e^{\pi is}-e^{-\pi is}}{2i}} = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

これは gamma 関数の相反公式である。□

参考文献

[1] 安倍齊，Abe, H.『応用関数論』森北出版，1891, (v+282)pp. *Complex Function Theory and its Applications* (in Japanese), Morikita-Shuppan, Tokyo, 1981.

[2] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980, (v+274)pp. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[3] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, (xii+374)pp., Chp.3.

(received 4 July 2022.)

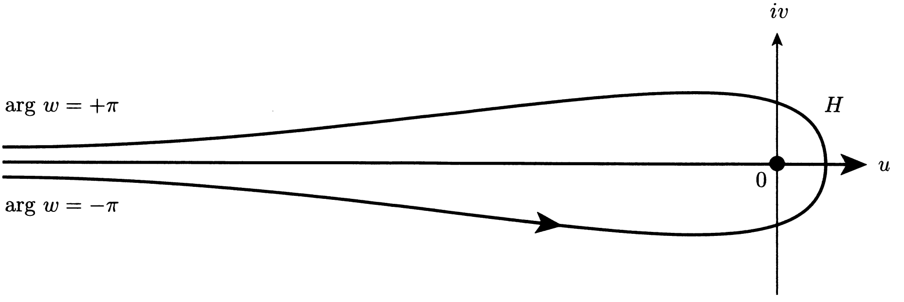

Fig. 1　Hankel contour: H

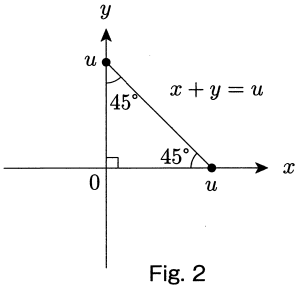

Fig. 2

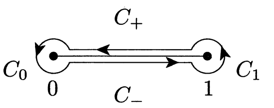

Fig. 3: H'

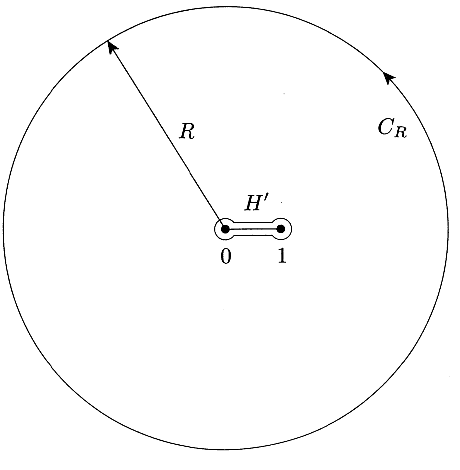

Fig. 4