Riemann予想の証明に就いて
On a Proof of the Riemann Hypothesis

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract
We study here a proof of the Riemann Hypothesis.

Key words ; the zeros of the Riemann Zeta-function, the Riemann hypothesis.
Mathematics Subject Classification 2010;　11M06, 11M26.

$\zeta(s), (s=\sigma+it\in\mathbf{C})$ を Riemann の zeta 関数とする。又, $\rho=\beta+i\gamma$ で $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero を表わすことにする。
又, $\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。
$12\ll m\in\mathbf{N}$ を一つ固定し, $C_m=m$ (or $m+\frac{1}{2}$) とする。
また, $s=\sigma+it$ ($\frac{1}{2}<\sigma<1,\ C_{m-1}<t<C_m$) も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。$\mathbf{N}\ni\nu\gg1$ は十分大きい自然数とする。
$\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero: $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ を,

$$\beta_0:=\max\{\beta>\frac{1}{2}\mid\rho=\beta+i\gamma,\ \zeta(\rho)=0,\ C_{m-1}<\gamma<C_m\}$$

で定義する。(ρ_0, β_0, γ_0 は m に依存するから, $\rho_{0,m}$, $\beta_{0,m}$, $\gamma_{0,m}$ と本来書くべきだが煩わしくなるので, このように書いても誤解は生じないはずである。) 従って, 領域 $\{w=u+iv\mid\ \beta_0<u,\ C_{m-1}<v<C_m\}$ は $\zeta(s)$ の非零領域 zero free region と

なる。
$\rho_+,\ \rho_-,\ \beta_+ > \frac{1}{2},\ \beta_- > \frac{1}{2},\ \gamma_+,\ \gamma_-,\ U_m^+,\ U_m^-,\ U_m,\ V_m^+,\ V_m^- > 0$
を次で定義する。

$$
\begin{aligned}
\rho_+ &:= \beta_+ + i\gamma_+,\ \zeta(\rho_+) = 0 \\
&\quad \gamma_+ := \min\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma_0 < \gamma\} \\
\rho_- &:= \beta_- + i\gamma_-,\ \zeta(\rho_-) = 0 \\
&\quad \gamma_- := \max\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta(\rho) = 0,\ \gamma < \gamma_0\} \\
U_m^+ &:= \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0),\ C_m\} \\
U_m^- &:= \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-),\ C_{m-1}\} \\
U_m &:= \frac{1}{2}\min\{|U_m^+ - \gamma_0|,\ |U_m^- - \gamma_0|, \frac{1}{2}\} \\
V_m^+ &:= \gamma_0 + U_m \\
V_m^- &:= \gamma_0 - U_m
\end{aligned}
$$

ρ_0 の左側：$\Im\rho = \gamma_0,\ \zeta(\rho) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0,\ \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \cdots$$

$$(\frac{1}{2} < \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0,\ \zeta(\rho_i) = 0,\ \Im\rho_i = \gamma_0,\ i = 1, 2, \cdots)$$

とする ($\rho_1,\ \rho_2, \cdots$ が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする。)。
注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u,\ U_m^- \le v \le U_m^+,\ v \ne \gamma_0\}$ は非零領域 zero free region である。

$s = \sigma + it,\ 0 < h := \frac{1}{\nu^2}(\sigma - \beta_0) \ll 1, \frac{1}{2} < \sigma < 1\ , |t - \gamma_0| \le h,$
$Y > 1, \delta > 1$ とする。$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{1}{2}$ が十分小さくなるように σ を選ぶ。
これより，

$$
\begin{aligned}
&t - \gamma_0 = \frac{\sigma - \beta_0}{\nu^2}y,\ -1 \le y \le 1 \text{ であるから，} \\
&\frac{1}{\sigma - \beta_0} \ge \frac{1}{\sqrt{(\sigma - \beta_0)^2 + (t - \gamma_0)^2}} = \\
&= \frac{1}{|s - \rho_0|} \ge \frac{1}{(\sigma - \beta_0)\sqrt{1 + \frac{1}{\nu^4}}} \ge \frac{1}{(\sigma - \beta_0)(1 + \frac{1}{\nu^4})} \ge \frac{1}{2(\sigma - \beta_0)},
\end{aligned}
$$

$$s-\rho_0=(\sigma-\beta_0)+i(t-\gamma_0)=(\sigma-\beta_0)\left(1+i\frac{y}{\nu^2}\right)=$$

$$=(\sigma-\beta_0)\left(1+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)\ ,$$

$0<\sigma-\beta_0\ll\dfrac{1}{2}$が十分小さくなるように$\sigma$を選んだから

$$\frac{|\rho-s|}{|\rho_0-s|}>2\quad(\rho\neq\rho_0)\quad for\ \ \forall\rho=\beta+i\gamma\quad\cdots(**)$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero)

である。

このとき，次の定理が成り立つ：

主定理 1

$$0<(\sigma-\beta_0)\ll\min\left\{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})},\ \frac{\sigma}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})},\ \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}\right\}$$

$\cdots(*)$,

となるようにσを選ぶ (これは明らかに可能である。) と，

$$\frac{1}{(\sigma-\beta_0)}\leq\max\left\{\frac{\sqrt{Y}\exp(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}},\ \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma},\ \frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となる。

従って，この結論は定理の仮定 $(*)$ と矛盾し，ρ_0 は，もはや $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero とは成り得ない。□

注

$$0<a,b,c \text{ に対して，}\quad \frac{1}{\min\{a,b,c\}}=\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}.$$

上記**主定理 1** を何回 (有限回) か繰り返し使い $\zeta(s)$ の関数等式 functional equation を使えば

主定理 2 $\zeta(s)$ の全ての複素零点 complex zero $\rho=\beta+i\gamma$ は，

$$\beta=\frac{1}{2}$$

を満たす。□

が得られる。

主定理１を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 (Hölder の不等式の系)
$\nu > 1,\ H > 0,\ [A,\ A+H]$ で絶対可積分な関数 $f(t)$ に対して,

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^{1/\nu}dt \le \left[\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^2 dt\right]^{1/(2\nu)},$$

が成立する。

証明
$(1/2\nu)+(1/\mu)=1$ となる μ をえらぶ。Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^{1/\nu}dt \\
\le\ & \frac{1}{H}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^{(1/\nu)\cdot 2\nu}dt\right\}^{1/2\nu}\left\{\int_A^{A+H}1^{\mu}dt\right\}^{1/\mu} \\
=\ & \frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^2 dt\right\}^{1/2\nu}H^{1/\mu} \\
=\ & \left\{\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^2 dt\right\}^{1/2\nu}
\end{aligned}$$

を得る。□

補題 2 $\sigma > 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots$ とする。
$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}} < 1 + \frac{1}{\sigma-1}$$

$m = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} &< m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\} \\
&\ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}\quad (\text{as } m\to\infty\ )
\end{aligned}$$

が成立する。

証明 先ず $m=1,2,\cdots$ のときを考える。
$f(y):=y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y)=y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m-\sigma\log y\}$ であるから，$f'(y_0)=0$ となるのは，$y_0=\exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\sum_{n=[y_0]+1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \\
&< \int_2^{[y_0]}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\int_{[y_0]}^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx \\
&< \int_1^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma} \\
&\le m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma} \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m \\
&\le m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+m!\frac{1}{e}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^m \\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m}\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}
\end{aligned}$$

但し，$[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又，

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m\le\frac{m!}{e}$$

を使った。
$m=0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\sigma}dx=1+\frac{1}{\sigma-1}$$

となり，補題は証明された。□

補題 3 (Montgomery-Vaughan の定理，[23] の 2nd ed.)
$a_n\in\mathbf{C}$, $A\in\mathbf{R}$, $H>0$, $Y>1$, $\sigma>\frac{1}{2}$ とする。このとき

$$\int_A^{A+H}|\sum_{n\le Y}a_n n^{-\sigma-it}|^2dt \quad = \quad H\sum_{n\le Y}|a_n|^2n^{-2\sigma}+\mathrm{O}(Y\sum_{n\le Y}|a_n|^2n^{-2\sigma})$$

が成立する。
O は絶対定数を持つ Bachmann-Landau のラージ・オウ記号 [18] である。

補題 4　$a_i,\ c_i = c_i(\nu) \in \mathbf{C}$ ，$f_i(\nu) \to 0\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 0, 1, \cdots, n)$ とする。又，$|a_0| > |a_i|\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，$|c_i|^{1/\nu} \to 1\ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)\ as\ \nu \to \infty,\ c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu\to\infty} |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^\nu a_i^\nu|^{1/\nu} = \max_{0\le i\le n} |a_i| = |a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\cdots,n} |a_i/a_0| =: 1/r\ (r > 1)$ とおく。

$$\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)} \to 1,\ |c_i|^{1/\nu} \to 1\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

また，n が有限 finite であるので，$\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\nu_0$ が存在して，

$$\left|\frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right| < 1+\epsilon\ \ (i = 1, 2, \cdots, n)\ for\ \forall\nu > \nu_0$$

となるが，ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1+\epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned}
& |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^\nu a_i^\nu|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_0}\left(\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right)^\nu\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^\nu\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{O}\left(\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^\nu\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^\nu}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^\nu}\right)\right\}^{R^\nu\cdot\frac{1}{\nu R^\nu}}\right| \\
\to \ & |a_0|\ \ (as\ \nu \to \infty)
\end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 5 [1], [2], [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [18], [21], [24]

(0) $$\frac{1}{\Gamma(s+1)} = \frac{1}{s\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-n}\right)e^{-\frac{s}{n}},$$

(1) $$\log\Gamma(s+1) = -\left[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\log\left(1-\frac{s}{(-n)}\right)+\frac{s}{(-n)}\right\}\right],$$

(2) $$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) =: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s} =$$
$$= -\left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right]$$
$$= \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right),$$
$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\psi(s)^{(\nu)} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(s+n)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots),$$

(3) $$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)}e^{(\log 2\pi-1)s}\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\prod_{q=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{-2q}\right)e^{-\frac{s}{2q}},$$

この対数を取り

(4) $$\log\zeta(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right)s - \log(s-1) -$$
$$-\log 2 - \log\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right] =$$
$$= (\log 2\pi)s - \log 2 - s - \log(s-1) +$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\log\left(1-\frac{s}{(-2q)}\right)+\frac{s}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho}\left[\log\left(1-\frac{s}{\rho}\right)+\frac{s}{\rho}\right],$$

この対数微分を取り

(5) $$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} -$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right) + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right] =$$
$$= \log 2\pi - \left[\frac{1}{(s-1)}+\frac{1}{1}\right] +$$
$$+\sum_{q=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s-(-2q)}+\frac{1}{(-2q)}\right] + \sum_{\rho}\left[\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right],$$

(6) $$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} + -\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{(s-(-2q))^{\nu+1}} - \sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu = 1, 2, \cdots),$$

(7) 関数等式 *functional equation* :

$$\zeta(1-s) = 2\cos\frac{\pi}{2}s\cdot\frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\zeta(s).$$

但し，γ_0 は Euler の定数である。

補題 6 ([18] 補題 6.9 系の一般化) $s = \sigma + it \neq 1, \rho, |t| > 2$ として，

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t) \quad (\nu = 1, 2, \cdots)$$

証明 補題 5,(6) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{[s-(-2q)]^{\nu+1}} - \sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}.$$

上記第 1 項は，$\mathrm{O}(t^{-\nu-1})$ である。

上記第 2 項については，$|s+2q|$ は $2q < \max\{-\sigma, 0\}$ で q について単調減少，$2q \geq \max\{-\sigma, 0\}$ で単調増加であるから

$$\begin{aligned}
\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{|s+2q|^{\nu+1}} &= \left\{\sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}} + \sum_{2q\ge\max\{-\sigma,0\}}\right\}\frac{1}{\{(\sigma+2q)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\
&< \sum_{2q<\max\{-\sigma,0\}}\frac{1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{t^{\nu+1}} + \int_{\frac{\max\{-\sigma,0\}}{2}}^{\infty}\frac{dx}{\{(\sigma+2x)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\
&< \frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2}\int_{\max\{-\sigma,0\}}^{\infty}\frac{dy}{\{(\sigma+y)^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\
&\le \frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{\{x^2+t^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\
&= \frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu+1}}\int_{0}^{\infty}\frac{tdy}{\{1+y^2\}^{\frac{\nu+1}{2}}} \\
&< \frac{\max\{-\sigma,0\}+1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu}}\int_{0}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{\max\{-\sigma, 0\}+1}{t^{\nu+1}} + \frac{1}{2t^{\nu}}\frac{\pi}{2} = \frac{1}{t^{\nu}}\left(\frac{\max\{-\sigma, 0\}+1}{t} + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$\ll \frac{1}{t^{\nu}}$$

第３項については，これを２つの和に分ける：

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma|\le 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

この第２項を評価する。ここで $t>0$ と仮定しても一般性を失わない。

$$\left|\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\right| \le \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}}$$
$$= \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}$$
$$< \sum_{\gamma<0} \frac{1}{|\gamma|^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma|>1, \gamma>0} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}$$
$$< \sum_{\gamma>0} \frac{1}{\gamma^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma|>1, \gamma>0} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{m\le\gamma<m+1} \frac{1}{\gamma^{\nu+1}} + \sum_{m=1,}^{[t]-2} \sum_{m\le\gamma<m+1, |t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} +$$
$$+ \sum_{m=[t]+2,}^{\infty} \sum_{m\le\gamma<m+1, |t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t)$$
$$< \sum_{m=1}^{\infty} \sharp\{\gamma \mid m\le\gamma<m+1\} \frac{1}{m^{\nu+1}} +$$
$$+ \sum_{m=1}^{[t]-2} \sharp\{\gamma \mid m\le\gamma<m+1\} \frac{1}{([t]-(m+1))^{\nu+1}} +$$
$$+ \sum_{m=[t]+2}^{\infty} \sharp\{\gamma \mid m\le\gamma<m+1\} \frac{1}{(m-([t]+1))^{\nu+1}} +$$
$$+\mathrm{O}(\log t)$$
$$as \quad \nu\to\infty, \quad with \quad some \quad 0<\epsilon\ll 1$$

ここで，後の補題７を使った。更に補題７を使うと

$$\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\log m}{m^{\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)
\end{aligned}
$$

また更に補題2を使うと

$$
\begin{aligned}
&\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\\
&\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&\quad+\sum_{m=1}^{[t]-2}\frac{\log m}{([t]-m-1)^{\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{m=[t]+2}^{\infty}\frac{\log m}{(m-1-[t])^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
&\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&\quad+\log t\sum_{l=1}^{[t]-2}\frac{1}{l^{\nu+1}}+\\
&\quad+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log(l+[t]+1)}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
&\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&\quad+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log t+\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
&\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&\quad+\log t+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\log l}{l^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
&\ll \left(\frac{1}{\nu}\right)^2+\frac{1}{e(\nu+1)}+\\
&\quad+\log t+\mathrm{O}\left(\log t\right)\\
&\ll \log t
\end{aligned}
$$

これより

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log t)$$

以上から補題は示された。□

補題 7 $N(T) := \sharp\{\rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = \zeta(\beta + i\gamma) = 0,\ 0 < \gamma \leq T\}$
とすると，

$$N(T+1) - N(T) < \frac{5}{2}\log T \quad for\ T \gg 1 \quad (T \geq e^{100}).$$

証明 [18] を精密化：補題 5,(2),(5) より

$$\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}+1\right)$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\left\{\log\frac{s}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{s}{2}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)\right\} + \frac{1}{s}$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log s - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2s} + \frac{1}{s} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log s$$
$$= -\frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2} + \frac{1}{2}\log 2\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|}\right) +$$
$$+ \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log s = \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$

ここで $s = (1+\epsilon) + iT$ $(0 < \epsilon)$ と置くと

$$\frac{1}{2}\log((1+\epsilon) + iT)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathrm{O}(1) - \frac{\zeta'}{\zeta}((1+\epsilon)+iT) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(1) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{1+\epsilon+iT}} + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}
$$

この両辺の実部 $\Re$ を取って

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log\sqrt{(1+\epsilon)^2+T^2} \\
&= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\Re\left\{\frac{1}{(1+\epsilon+iT)-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1+\epsilon-\beta}{(1+\epsilon-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right\} \\
&> \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\log T + \frac{1}{4}\log\left(1+\left(\frac{1+\epsilon}{T}\right)^2\right) \\
&> \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\log T > \mathrm{O}(1) + \sum_{\rho}\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2}$$

$$\Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1+\epsilon'}{2}\log T \\
&> \sum_{\rho}\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+(T-\gamma)^2} \quad \text{with some } \epsilon' > 0 \\
&> \sum_{T<\gamma\le T+1}\frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+1} = \frac{\epsilon}{(1+\epsilon)^2+1}\sum_{T<\gamma\le T+1}1
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{(1+\epsilon')((1+\epsilon)^2+1)}{2\epsilon}\log T \\
&> \sum_{T<\gamma\le T+1}1 = N(T+1)-N(T)
\end{aligned}
$$

ここで $\epsilon=\sqrt{2}$, $\epsilon'=0.035533$ と置くと

$$\frac{5}{2}\log T \quad > \quad \frac{(1+\epsilon')((1+\sqrt{2})^2+1)}{2\sqrt{2}}\log T$$

$$= \frac{1+0.035533}{2}(4.828427124\cdots)\log T > N(T+1) - N(T)$$
$$for\ T \gg 1$$

となり証明は終了した。□

補題 8 (Theorem26 of [7] の一般化)
$m \gg 1$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$ に対して，$m-1 < T_m \le m$ なる T_m が存在して

$$\begin{aligned}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT_m)^{(\nu)}\right| &\ll (6\log T_m)^{\nu+2} \\ &\ll (6\log m)^{\nu+2}\end{aligned}$$

を満たす。

証明　虚軸方向の区間 $(i(m-1),\ im]$ を，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 等分すると，補題 7 により，$\frac{5}{2}\log m + 1$ 個に分割された臨界帯 critical strip:$0 < \sigma < 1$ の小区間には，$\zeta(s)$ の零点 zero を含まないものが少なくとも 1 個ある。この小区間の虚軸方向の 2 等分点を iT_m として，補題 6 を使うと

$$\begin{aligned}&\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT_m)^{(\nu)} \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\le 1}\frac{1}{|(\sigma-\beta)+i(T_m-\gamma)|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\le 1}\frac{1}{|T_m-\gamma|^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\le 1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\log T_m+1\right)^{-1}\right\}^{-\nu-1} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & \sum_{|T_m-\gamma|\le 1}\{5\log T_m+2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m) \\ \ll\ & (5\log T_m)\{5\log T_m+2\}^{\nu+1} + \mathrm{O}(\log T_m) \quad (\textstyle\sum \text{に補題 7 を使った。}) \\ \ll\ & (6\log T_m)^{\nu+2} \\ \ll\ & (6\log m)^{\nu+2}\end{aligned}$$

となり補題は証明された。□

補題 9　$s=\sigma+it$ を $\zeta(s)$ の正則点として，s に一番近い $\zeta(s)$ の複素零点は１つとして，それを ρ_0 とする。そして $|s-\rho_0|<|s-(-2q)|$ $(q=1,2,\cdots)$, $|t-\gamma_0|\le\frac{\sigma-\beta_0}{\nu^2}$, $|s-\rho_0|<|s-1|$, $|s-\rho_0|\ll 1$, $|s-\rho_0|<\sigma<|s|$ とする。このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}$$

証明 補題6,7より　(as　$\nu\to\infty$)

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}=-\sum_{|t-\gamma|\le1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)=$$

$$=-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le1}\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-$$

$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le1}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)+\mathrm{O}(\log t)\ ((**)\text{による。})$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le1}1+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\mathrm{O}(\log t)+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\mathrm{O}(\log t)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left((s-\rho_0)^{\nu+1}\log t\right)$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left(2^{-(\nu+1)}\log t\right)\ \ (|s-\rho_0|\ll1\text{による。})$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

$$=\ -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log C_m}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{2^{\nu+1}}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

$$= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+i\frac{y}{\nu^2}\right)^{\nu+1}} \ (|y| \le 1)$$

$$= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)} = -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$$

$$= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \quad as\ \nu \to \infty \quad \square$$

補題 10 [11], [12], [18]
$c > 0,\ Y > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{Y^w}{w^2}dw = \begin{cases} \log Y, & (1 \le Y) \\ 0, & (0 < Y \le 1) \end{cases}$$

補題 11 ([20] の改変)
$c > 0,\ X, Y > 1, n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{\frac{w}{\nu}}w^2\log Y}dw = \begin{cases} 1 &, \quad (n \le X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \le 1, & (X^\nu \le n \le (XY)^\nu) \\ 0 &, \quad ((XY)^\nu \le n) \end{cases}$$

証明　被積分関数を展開して補題 10 を使えば良い。□

補題 12
実数上有界な台 $[B, C]$ を持つ複素数値関数 $f(v) = f_1(v) + if_2(v)$, $(f_1(v) := \Re f(v),\ f_2(v) := \Im f(v))$ の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivx)dv \quad \cdots(a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z = x + iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv \quad \cdots(b)$$

は $z = x + iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。
注　この補題は、ある意味，弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明　複素解析的ならば実解析的であるから，後者を証明すれば良い。

$$F(z) = F(x+iy) = F_1(z) + iF_2(z) = F_1(x+iy) + iF_2(x+iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$，$F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv = \int_B^C f(v)\exp(ivz)dv,$$

$$f(v)\exp(ivz) = \{f_1(v) + if_2(v)\}\exp[iv(x+iy)] =$$

$$= \{f_1(v) + if_2(v)\}e^{-vy}\{\cos(vx) + i\sin(vx)\}$$

$$= \{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy} + i\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}$$

であり，この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている)，これより

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

主定理 1 の証明

以降，$o(\cdot)$，$\mathrm{O}(\cdot)$，$\ll$，$\sim$ 等の記号は $\nu \to +\infty$ のときを考えている。
$s = \sigma + it$，$\frac{1}{2} < \sigma < 1$，$\nu \in \mathbf{N}$，$1 \ll \nu$，$X, Y > 1$，$\delta > 1$ として次の積分を考える：

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)dw}{w^2\log Y}$$
$$(\frac{1}{2} < \sigma < 1,\ w = u + iv).$$

ここで，後に $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma-\beta_0}$, $\delta > 1$ [22] とする。δ は後に決める。
$\sigma = \Re s > 1$ であるとき，

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}$$

は一様絶対収束するので積分 $\int$ と和 $\sum$ が交換出来て，補題 11 を使うと，この積分 I_ν は

$$\begin{aligned} I_\nu &= \frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{w/\nu}}\frac{dw}{w^2\log Y} \\ &= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}\alpha_n, \end{aligned}$$

$$where\ \alpha_n := \begin{cases} 1 & , \quad (n \le X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \le 1, & \quad (X^\nu \le n \le (XY)^\nu) \\ 0 & , \quad ((XY)^\nu \le n) \end{cases}$$

$\cdots(1)$

となる。ここで，$\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数，即ち，

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & (n = p^k,\ \text{with some prime } p \text{ and some } k \in \mathbf{N} \text{ のとき}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

$$(-1)^{\nu+1}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^{\nu}}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

である。
ここで積分路を次の $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである：$A > 1$ として

$$\begin{aligned} L &= L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 \\ L_1 &= (\nu - i\infty,\ \nu + i\nu(V_m^- - t)], \\ L_2 &= [\nu + i\nu(V_m^- - t),\ -A + i\nu(V_m^- - t)], \\ L_3 &= [-A + i\nu(V_m^- - t),\ -A + i\nu(V_m^+ - t)], \\ L_4 &= [-A + i\nu(V_m^+ - t),\ \nu + i\nu(V_m^+ - t)]. \\ L_5 &= [\nu + i\nu(V_m^+ - t),\ \nu + i\infty). \end{aligned}$$

留数定理により，

$$I_\nu = \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)^{(\nu)}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\cdots(2)$$

を得る。ここで，補題9を使った。また，$\nu \gg 1$ であるので $\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})$ の特異点 $w=\nu(\rho-s)$ は $\Re\nu(\rho-s)\ll -A$ となり，積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w=\nu(\rho-s)$ は存在しない。
次に (2) の5つの積分を上から評価する。
積分路 L_1 上では

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^- -t)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+1)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|w|^2}dw$$
$$\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}$$
$$\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^{\nu+1}}{n^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}$$
$$\ll\frac{(XY)^\nu}{\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dv}{\nu^2+v^2}\quad\text{(補題2を使った。)}$$
$$=\frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}$$
$$=(XY)^\nu\frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$
$$\ll(XY)^\nu\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}$$

$$\ll \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{XY}{\sigma}\right)^{\nu} \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^{\nu} \qquad \cdots(3)$$

となる。
積分路 L_5 上でも同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^{\nu} \qquad \cdots(3')$$

積分路 L_2 上では

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu+i\nu(V_m^- -t)}^{-A+i\nu(V_m^- -t)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it+\frac{u}{\nu}+\frac{i}{\nu}\nu(V_m^- -t))^{(\nu)}\right| \times$$
$$\times\frac{(XY)^{\nu}}{|i\nu(V_m^- -t)|^2}dw$$
$$\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu}^{-A}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+\frac{u}{\nu}+iV_m^-)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^{\nu}}{|\nu(V_m^- -t)|^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu}}{\log Y}\int_{\nu}^{-A}\frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu}}{\log Y}(A+\nu)\frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu} \qquad \cdots(4)$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^{\nu} = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu} \qquad \cdots(4')$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。$B \gg 1$ として積分路 L_3 を 3 つ：

$$L_{3,1} := [-A+i\nu(V_m^- -t), -A-iB],$$
$$L_{3,2} := [-A-iB, -A+iB],$$

$$L_{3,3} := [-A+iB, -A+i\nu(V_m^+ - t)],$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)$$ と B を選ぶ.

に分けて評価する。A の値は後に決めるが，その A の値に対して B を定める。
さて

$$\left(s-\rho_0+\frac{w}{\nu}\right)^{\nu+1} = \left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

を考える。
仮定している $s-\rho_0=(\sigma-\beta_0)\left(1+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$\begin{aligned}
&\left\{s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&=\left\{(\sigma-\beta_0)\left(1+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&=\left\{(\sigma-\beta_0)\left(1+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right\}^{\nu+1}\\
&=(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{\nu+1},
\end{aligned}$$

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{-(\nu+1)}$$

は $|v| \le B$ のとき，

$$\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{-(\nu+1)}\\
&=\frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)}\exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\\
&=(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}$$

であり，$|v| \ge B$ のときは，

$$\begin{aligned}
&\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right|^{-(\nu+1)}\\
&=\left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\left|1+i\frac{v/\{\nu(\sigma-\beta_0)\}}{1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2\left(1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)}\right)\right|^{-(\nu+1)}
\end{aligned}$$

$$\leq \left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)} \cdot 1 \qquad (|x+iy| \geq |x|, x, y \in \mathbf{R}\text{ を使った。})$$
$$\leq \left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,3}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right|$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)} \left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)} \left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{\left|s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)} \frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)\right)\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}$$
$$\leq \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)dv}{(A^2+v^2)}$$
$$\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\infty}\frac{dv}{(A^2+v^2)}$$
$$= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\int_{\frac{B}{A}}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)}$$
$$= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\left\{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right\}$$
$$\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$

$\left(0<\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\ll\exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\right.$ と B を選んだ.)

$$= \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y}$$
$$\cdots (5)$$

ここで $w \in L_{3,3}$ であるから，$w=-A+iv=-A+i\nu(y-t)$ と置いて，
$B \leq v \leq \nu(V_m^+ - t)$ より

$$\begin{aligned} s+\frac{w}{\nu} &= \sigma+it+\frac{-A+i\nu(y-t)}{\nu} \\ &= (\sigma-\frac{A}{\nu})+iy \quad (\frac{B}{\nu}+t \leq y \leq V_m^+). \end{aligned}$$

従って，$\rho \neq \rho_0$ なる ρ に対して $w \in L_{3,3}$ であるとき

$$\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho\right| > \left|s+\frac{w}{\nu}-\rho_0\right|$$

となるので補題9を使ったことに注意すべきである。
$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,1}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+i\nu(V_m^- - t)}^{-A-iB} \left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right| \frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y} \\ &\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right) \\ &= \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y} \\ &\quad \cdots (5') \end{aligned}$$

となる。
最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$

について詳述する:
$|v| \leq B$ のとき，

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{-(\nu+1)}$$

$$= \frac{1}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)} \exp\left\{\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$= (1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)) \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)$$

であったが，これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)} \ll 1$ である $(\nu \gg 1)$ ので

$$\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{-(\nu+1)}$$

$$= \left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}^{-1} \times$$

$$\times \exp\left[(-\nu)\log\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)\right]$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1} \times$$

$$\times \exp\left[(-\nu)\left\{\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^2+\cdots+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right\}\right]$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1} \times$$

$$\times \exp\left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)}+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times$$

$$\times \exp\left[\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right]$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times$$

$$\times \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}$$

$$= \left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)$$

である。このことを使って

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}+i\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu^2}\right)\right)^{\nu+1}}\times\\
&\times\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv\\
&\quad\cdots(\star)
\end{aligned}
$$

$(\star)$ の右辺の積分を

$$
\begin{aligned}
&F_\nu(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv
\end{aligned}
$$

と置いて

$$
\begin{aligned}
&F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv
\end{aligned}
$$

とする。

$$\left|\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)\right|$$
$$\leq\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

をみたし,

$$\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

は可積分 integrable であるので
Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

である。また補題 12 より
$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっている。
また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X=0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

は $X=0$ を除いて $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu\gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{\log t}{2^\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}F_\nu(X)\quad with\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

で $F(X)$ は $X>0$ で実解析的でνに依存しない
複素数値実解析関数である。

$\cdots(6)$

(1), (2), (3), (3′), (4), (4′), (5), (5′), (6), 補題9を使うと

$$
\begin{aligned}
&I_\nu \equiv \\
&= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n \\
&= -\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} + \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} + \\
&+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,2}} + \int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta'}{\zeta}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw,
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw - \\
&-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\int_{L_{3,2}}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'}{L}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw \\
&= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)\chi(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n + \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left[\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\} + \left\{\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{\nu!}\sum_{n\le (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)\chi(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n + \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow \clubsuit$
を得る。ここで上記左辺の第1項の中：

$$\alpha := \left\{ \left(\frac{1}{2}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) \right\} + \left(\frac{1}{2}\right)$$

が

$$|\alpha| > \frac{3}{4}$$

であるように $A > 1,\ Y > 1$ を選び (実際の A, B の選び方は第1番目に上記のように A を選び，第2番目に B を選ぶ。α を定める際，X を変化させずに A を定めることが出来る事に注意すべきである。)，そして

$$\left\{\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X)\right\}$$

に関して

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0$$

となるよう

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0},\ \delta > 1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと，定数 constant でないこと (**注 1**) から可能である。また上記

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。
従って上記 $\clubsuit$ は
$\clubsuit \Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&0 \neq -\frac{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{\alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X)\right\} \\
&= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s} \alpha_n + \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} \\
&\mathit{with}\ \ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0 \\
&\quad \cdots (7)
\end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$
$$\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X) \neq 0$$

より，即ち

$$\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right| \to \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| > 0 \quad as\ \nu \to \infty$$

より，十分小さい正数 $0 < \epsilon_0 \ll 1$ を

$$0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0$$

を満たすように選ぶと十分大きい $^\forall\nu \gg 1$ に対して

$$0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right| < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| + \epsilon_0 \cdots (\star\star)$$

となる。ここまでは $s = \sigma + it$ を固定 fixed していた。
上記 (7) の左辺の絶対値の t についての $\frac{1}{\nu}$ 乗平均値積分を考えるが，$(\star\star)$ と補題 1 から

$$\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}} dt$$
$$\leq \frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left\{\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\right\}^{\frac{1}{\nu}} dt$$
$$\leq \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$
$$\leq \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{\nu!}\sum_{n\leq(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$
$$\leq \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left(\left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}\right| + \left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right| + \right.\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|\Biggr)^2 dt\Biggr]^{\frac{1}{2\nu}}\\
&\le\Biggl[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\mathrm{O}\Biggl(\left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}\right|^2+\left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right\}\right|^2+\\
&+\left|\mathrm{O}\left\{\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right\}\right|^2\Biggr)dt\Biggr]^{\frac{1}{2\nu}}\\
&\le\Biggl[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\mathrm{O}\Biggl(\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right|^2+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right|^2+\\
&+\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2\Biggr)dt\Biggr]^{\frac{1}{2\nu}}\\
&\le\Biggl[\mathrm{O}\Biggl\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2dt+\\
&+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right|^2+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right|^2\Biggr\}\Biggr]^{\frac{1}{2\nu}}\\
&\le\Biggl[\mathrm{O}\Biggl\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2dt+\\
&+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right|^2+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right|^2\Biggr\}\Biggr]^{\frac{1}{2\nu}}\\
&\qquad\cdots(8)
\end{aligned}
$$

を得る。ここで $a,b,c,d\ge 0$ に対して $(a+b+c+d)^2\le 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ であることを使った。

(8) の右辺の積分に対して補題 3 を使うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2dt\\
&=\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2}{n^{2\sigma}}(\log n)^{2\nu}{\alpha_n}^2+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n\le (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2}{n^{2\sigma}}(\log n)^{2\nu}{\alpha_n}^2\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n\le (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2}{n^{2\sigma}}(\log n)^{2\nu}{\alpha_n}^2\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n\le (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)^2}{n^{2\sigma}}(\log n)^{2\nu}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n\le (XY)^\nu}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^{2\nu+2}}{n^{2\sigma}}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\right)(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}\right)\\
&=\mathrm{O}\left(\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{3}\right)
\end{aligned}
$$

となるので，(8) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt\\
&\le\left[\mathrm{O}\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le (XY)^\nu}\frac{\Lambda(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n\right|^2dt+\right.\right.\\
&\left.\left.+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right|^2+\left|\left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)^\nu\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}} \qquad \cdots(8)\\
&\le\left[\mathrm{O}\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{3}+\right.\right.
\end{aligned}
$$

$$+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

即ち

$$\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\left[\mathrm{O}\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$\cdots(9)$

が得られる。ここまでは ν は有限値 finite value であった。ここで，$\nu\to\infty$ とすると

$$0<\frac{1}{\sigma-\beta_0}=$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\left[\mathrm{O}\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu}\frac{(2\nu+2)(2\nu+1)\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^3+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right),\left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$

(補題 4 を使った。)

$$\cdots(10)$$

従って

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0} \leq$$

$$\leq \max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}$$

$$\cdots(11)$$

が得られる。
(11) で $\sigma-\beta_0>0$ を保ちながら，σ を β_0 に十分近づければ，$\beta_0>\frac{1}{2}$ であるので，(11) の左辺は ∞ に近づき，一方 (11) の右辺は

$$\max\left\{\left(\frac{\sqrt{Y}\exp\left(\frac{\frac{3}{2}\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma-\frac{1}{2}}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{\sigma}\right), \left(\frac{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)\right\}\Bigg|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$; $\beta_0>\frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $\zeta(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注1： $F(X)$ が定数でないことの証明

$$G(z):=F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

$$=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2}\exp((-A+iv)z)dv$$

$$with\quad z:=\log X$$

$G(z)=constant$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\frac{d}{dz}G(z)=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$

$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)}{(-A+iv)} \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)\exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)\exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\left(1-Y^{-A+iv}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{-A+iv}\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&Y^A \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv \\
&= \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} dv
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&Y^A \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B} \\
&= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} \\
&= \frac{\sin\left\{B\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right) + B\log Y\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} \\
&= \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\cos(B\log Y) + \cos\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}\sin(B\log Y)}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}
\end{aligned}
$$

ここで, $\log Y = 2\pi l,\ l, B \in \mathbf{N}$ とすると

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l}$$

$\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} \neq 0$ であるので
$\Longleftrightarrow$

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi l} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X \gg 1$ であるが，$A \gg 1$ であるので
$\Longleftrightarrow$

$$1 \ll e^{2\pi l A} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi l} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi l}, l \in \mathbf{N}, 1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq constant.$ □

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ の選び方
$X = \exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}, Y = e^{2\pi l}, A,\ l, B \in \mathbf{N}, \sigma - \beta_0$ は次の条件 (a),(b),(c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi l}\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}} \cdots \text{(a)}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \cdots \text{(b)}$$

$$\left|\frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) + \frac{1}{2}\right| > \frac{3}{4} \cdots \text{(c)}$$

満たすが，先ず (a) を満たすように $\sigma - \beta_0$ を選び，次に (c) を満たすように A を選んでから，(b) を満たすように B を選ぶ。
主定理 2 の証明

m を固定して主定理１を繰り返し適用すると，
$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり，
非零領域 zero free region：

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

は，左方向に広がって行き，遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。
主定理は次の結論を導いている。即ち，存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず，$\frac{1}{2} < \sigma$ となる $\zeta(s)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば，結局 $\zeta(s)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。
$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので，この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。
従って $\beta_0 > \frac{1}{2}$ となり得ない。また $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の関数等式 funnctional equation により，$0 < \beta_0 < \frac{1}{2}$ でもあり得ず，$\beta_0 = \frac{1}{2}$ となる。$\square$

参考文献

[1] Apostol,T.M.: *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer, 1976.

[2] Chandrasekharan,K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.

[3] Davenport,H: *Multicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)

[4] Estermann,T.: *Introduction to Modern Prime Number Theory*, Cambridge Univ. Press, 1961.

[5] Huxley,M.N.: *The Distribution of Prime Numbers* (*Large seives and zero-density theorems*), Oxford, Clarendon Press, 1972.
(p.54(12.39) $e^{B(x)s} \to e^{B(\chi)s}$, (12.40) $\frac{1}{2}\log 2\pi \to \frac{1}{2}\log \pi$ とすべき　である。p.56 (13.6) もそうである。)

[6] 一木正幸 Ichinoki,M.:『素数定理；その解析的証明』丸善出版サービスセンター，2003.
The Prime Number Theorem; its analytical proofs, Maruzen Publish Service Center, 2003.

[7] Ingham,A.E.: *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.

[8] Jameson,G.J.O.: *The Prime Number Theorem*, Cambridge Univ. Press, 2003.

[9] Karatsuba,A.A. (translated by Nathanson,M.B.): *Basic Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1993, traslation from the original Russian ed.: Osnovy analiticheskoj teorii chisel, 2nd ed., Nauka, Moscow 1983.

[10] Kowalski,E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.

[11] Landau,E.: *Handbuch der Leher von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 66,87,88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]

[12] 三井孝美 Mitsui,T.:『整数論；解析的整数論入門』至文堂，1970.
Number Theory; Introduction to Analytic Number Theory (in Japanese)，Shibunndo, Tokyo, 1970.

[13] Montgomery,H.L.: *Ten Lectures on the Interface between Analytic Number Theory and Harmonic Analysis*, AMS, 1994.

[14] Montgomery,H.L. and Vaughan,R.C.: *Miltiplicative Number Theory* I. *Classical Theory*, Cambridge Univ. Press, 2007.

[15] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 A Mean Value Integral,
鹿児島経済論集，第 59 巻 1 号, 2018 年 10 月, 1-31, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, October 2018, 1-31.

[16] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (II) A Mean Value Integral(II), 鹿児島経済論集，第 59 巻 2 号, 2018 年 12 月, 141-154, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, December 2018, 141-154.

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 12 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics,* **60**, December 2019, 61-76.

[18] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014，2012，『素数定理の進展・下』，丸善出版，2013)

[19] Rademacher,H.: *Topics in Analytic Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[20] Selberg,A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.

[21] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese)，Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[22] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[23] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

[24] 内山三郎 Uchiyama,S.:『素数の分布』宝文館, 1970. *The Distribution of Prime Numbers* (in Japanese), HoubunKan-Shuppan, Tokyo, 1970.

(received 27 April 2022.)

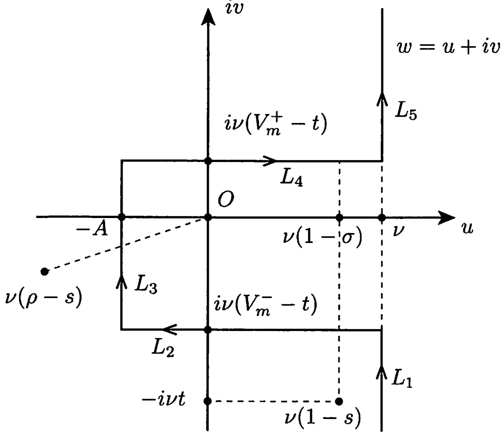

Fig. 1

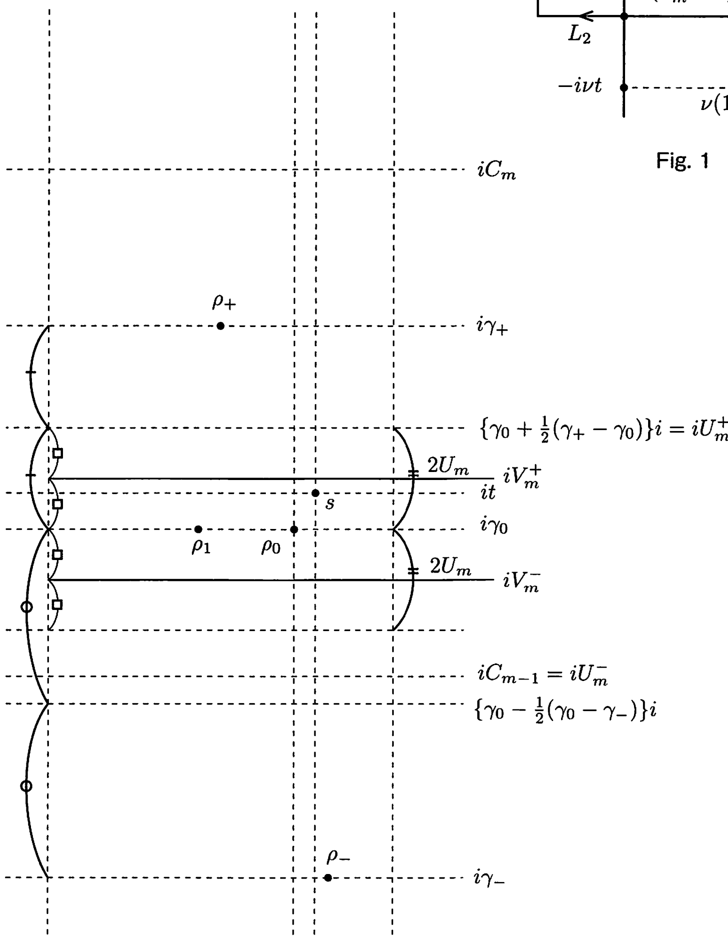

Fig. 2 $\left.\begin{array}{l}\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-) < C_{m-1} \\ \gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0) < C_m\end{array}\right\}$ のとき