論説：素数定理より Riemann 予想へ
From the Prime Number Theorem to the Riemann Hypothesis

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

This paper is a review on the Prime Number Theorem and the Riemann Hypothesis. The configuration descriptition of this paper about the above theme is new as far as the author knows.

Key words ; the Riemann zeta-function, the Prime Number Theorem, the Riemann Hypothesis.
Mathematics Subject Classification 2010;　11M06.

記号

Bachmann-Landau のラージ・オウ，スモール・オウ記号：

$$f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x))$$

$$\Longleftrightarrow$$

$^{\exists}$定数 $C_{\alpha,\beta,\cdots}$ *depending on* $\alpha, \beta, \cdots$, *but independent of* x *with* $|f(x)| \le C_{\alpha,\beta,\cdots} g(x)$ *as* $x \to a$ *or* $^{\forall}x \in A$ *considered*,

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \ or \ f(x) = \mathrm{O}_{\mathrm{abs}}(g(x))$$

$$\iff$$

$$^{\exists}\text{絶対定数}\, C \ with \ |f(x)| \leq Cg(x)$$
$$as \ x \to a \ or \ ^{\forall}x \in A \ considered,$$

$$f(x) = o(g(x))$$

$$\iff$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0 \quad as \ x \to a \ considered.$$

Vinogradov の記号

$$f(x) \ll_{\alpha,\beta,\cdots} g(x)$$

$$\iff$$

$$f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x)),$$

$$f(x) \ll g(x)$$

$$\iff$$

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)).$$

$\asymp$ 記号

$$f(x) \asymp_{\alpha,\beta,\cdots} g(x)$$

$$\iff$$

$$f(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(g(x)) \ and \ g(x) = \mathrm{O}_{\alpha,\beta,\cdots}(f(x)),$$

$$f(x) \asymp g(x)$$

$$\iff$$

$$f(x) = \mathrm{O}(g(x)) \ and \ g(x) = \mathrm{O}(f(x)).$$

$$\pi(x) := \ ^{\sharp}\{p \mid p \leq x, \ p\ \text{は素数}\}$$

$\sim$ 記号

$$f(x) \sim g(x) \quad as \ x \to a$$

$\Longleftrightarrow$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

$[x]$ 記号

$[x]$ is the largest integer less than or equal to $x \in \mathbf{R}$.

$N(T)$

$$N(T) := {}^\sharp\{\ \rho = \beta + i\gamma \mid \zeta(\rho) = 0,\ 0 \le \beta \le 1,\ 0 < \gamma < T\ \}$$

ここで $\zeta(s), (s = \sigma + it)$ は Riemann の zeta 関数である。即ち

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},\sigma > 1 \text{ (Euler 積)}$$

を全複素平面 $\mathbf{C}$ に解析接続したもの。又, $\rho = \beta + i\gamma$ $(\gamma \neq 0)$ で $\zeta(s)$ の複素零点 complex zero を表わすことにする: $\zeta(\rho) = \zeta(\beta + i\gamma) = 0$
又，$\Gamma(w)$ は Euler の gamma 関数である。

$\zeta(s)$ の主要性質

(1)　関数等式

$$\zeta(1-s) = 2\cos\frac{\pi}{2}s \cdot \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\zeta(s),$$

$$\log\zeta(1-s) = \log(2\cos\frac{\pi}{2}s) + \log\Gamma(s) - s\log(2\pi) + \log\zeta(s),$$

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) := \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log 2\pi + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}s - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s),$$

$$\textit{where } \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) := \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$$

(これらは *theta* 級数の関数等式と $\Gamma(s)$ の *Euler* の積分表示より得られる。もう一つは $\Gamma(s)$ の *Euler* の積分表示より得られる $\zeta(s)$ の複素積分表示から得られる。
どちらも *Riemann* の有名な 1859 年の論文による。)

(2)　Weierstrass · Hadamard の因数分解

$$\zeta(s) = \frac{1}{2(s-1)} e^{(\log 2\pi - 1)s} \prod_\rho \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}} \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{-2m}\right) e^{\frac{s}{-2m}}$$

($(s-1)\zeta(s)$ は位数１の整関数)

(3)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) =$$
$$= \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}+1) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= \log 2\pi - \left\{\frac{1}{s-1}+\frac{1}{1}\right\} +$$
$$+ \sum_{q=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-2q)}+\frac{1}{-2q}\right\} + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$

(これらは (2) を対数微分して$\Gamma(s)$ の性質より得られる。),

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s} \quad (\sigma = \Re s > 1)$$

(これは $Euler$ 積を対数微分して得られる。),

(4)

$$N(T) \ll \log T \quad (T > 2),$$

(5)

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \ll \log T \quad (T > 2),$$
$$\sum_{|T-\gamma|\geq 1}\frac{1}{(T-\gamma)^2} \ll \log T \quad (T > 2),$$

(6)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}(\log t) \quad (-1 \leq \sigma \leq 2, t > 2),$$

(7)

$^{\forall}m \in \mathbf{N}$ に対して $m <^{\exists} T \leq m+1$ *with*

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + iT) \ll (\log T)^2 \quad (-1 \leq \sigma \leq 2),$$

(8)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) \ll \log(|s|) \quad (\sigma \leq -1)$$

except the circles of radius $\frac{1}{2}$ around the trivial zeros :

$s=-2,-4,\cdots$ of $\zeta(s)$.

$\Gamma(s)$ の主要性質

(1) $\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\dfrac{\pi}{\sin\pi s}$, $(s\notin\mathbf{Z})$

(2) Weierstrass · Hadamard の因数分解

$$\frac{1}{\Gamma(s+1)}=e^{\gamma_0 s}\prod_{m=1}^{\infty}(1+\frac{s}{m})e^{-\frac{s}{m}}$$

(3)
$$\log\Gamma(s+1)=-[\gamma_0 s+\sum_{n=1}^{\infty}\{\log(1-\frac{s}{(-n)})+\frac{s}{(-n)}\}],$$

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1)=:\psi(s+1)=\psi(s)+\frac{1}{s}$$

$$=-[\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\}],$$ γ_0 は Euler の定数.

(これらは (2) を対数微分して $\Gamma(s)$ の性質より得られる。)

$$=\log(s+1)-\frac{1}{2(s+1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$$

§ 1. 素数定理と同値な命題

チェビショーフ第 1 関数：

$$\psi(x):=\sum_{n\le x}\Lambda(n)\quad(x\ge 1)$$

ここで,

$\Lambda(n)$ は von Mangoldt 関数，即ち,

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p, & (n=p^k,\ \text{with some prime } p \text{ and some } k\in\mathbf{N}\text{ のとき})\\ 0, & (\text{その他のとき})\end{cases}$$

である。

チェビショーフ第 2 関数：

$$\theta(x):=\sum_{p;\ p\le x}\log p<x\log x\quad(x\ge 1)$$

$$\psi(x)\ :=\ \sum_{n\le x}\Lambda(n)$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p,m;\ p^m \le x} \log p = \sum_{p \le x} \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \log p \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \theta(x^{\frac{1}{m}}) = \sum_{m=1}^{[\frac{\log x}{\log 2}]} \theta(x^{\frac{1}{m}}) \ \ (x^{\frac{1}{m}} < 2 \text{ ならば } \theta(x^{\frac{1}{m}}) = 0.) \\
&= \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{m=3}^{[\frac{\log x}{\log 2}]} \theta(x^{\frac{1}{m}}) \\
&= \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{m=3}^{[\frac{\log x}{\log 2}]} \mathrm{O}(x^{\frac{1}{m}} \frac{1}{m} \log x) \\
&= \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \sum_{m=3}^{[\frac{\log x}{\log 2}]} \mathrm{O}(x^{\frac{1}{3}} \log x) \\
&= \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \mathrm{O}(\frac{\log x}{\log 2} x^{\frac{1}{3}} \log x) \\
&= \theta(x) + \theta(x^{\frac{1}{2}}) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{3}} (\log x)^2) \\
&= \theta(x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}} \log x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{3}} (\log x)^2) \\
&= \theta(x) + \mathrm{O}(x^{\frac{1}{2}} \log x) \cdots (1)
\end{aligned}
$$

補題 1 (Legendre1808, [3] 上巻 p.50, 補題 1.20.)

$$n! = \prod_{p \le n} p^{h_p} \ with \ h_p := \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^m}\right] = \sum_{m=1}^{[\frac{\log n}{\log p}]} \left[\frac{n}{p^m}\right]$$

証明 1 から n までの整数の中で p の倍数は $[\frac{n}{p}]$ 個あり，p^2 の倍数は $[\frac{n}{p^2}]$ 個あり，$\cdots$, p^m の倍数は $[\frac{n}{p^m}]$ 個ある。
p^2 の倍数は p の倍数でもあり，p^3 の倍数は p の倍数でもあり，p^2 の倍数でもある。同様に p^m の倍数は p の倍数でもあり，p^2 の倍数でもあり，$\cdots$, p^{m-1} の倍数でもある。
これらの重複を考えると補題が得られる。□

補題 2

$$0 \le [2t] - 2[t] \le 1.$$

証明 $t = m + x \ with \ 0 \le x < \frac{1}{2}$, $m \in \mathbf{Z}$ のとき

$$[2t] - 2[t] = [2m + 2x] - 2[m + x] = 2m - 2m = 0,$$

$t = m + x \ with \ \frac{1}{2} \leq x < 1, \ m \in \mathbf{Z}$ のとき, $1 \leq x < 2$ より

$$[2t] - 2[t] = [2m + 2x] - 2[m + x] = 2m + 1 - 2m = 1$$

となり補題は証明された。□

定理 1

$$\psi(x) \asymp x, \quad \theta(x) \asymp x \quad (x \geq 2).$$

証明 (1) より $\theta(x) \ll x, \ \psi(x) \gg x \ (x \geq 2)$ を示せば十分である。

$$M := \binom{2m+1}{m} = \frac{(2m+1)(2m)\cdots(m+2)}{m!} \quad (m \geq 1)$$

$$(1+1)^{2m+1} > \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2M \Longrightarrow M < 2^{2m}$$

$m + 1 < p \leq 2m + 1$ なる素数 p は M の分子を割り切るが M の分母を割り切らないから

$$\prod_{m+1<p\leq 2m+1} p | M$$

従って

$$\theta(2m+1) - \theta(m+1) \equiv \sum_{m+1<p\leq 2m+1} \log p \leq \log M < (2\log 2)m$$

$n = 1, 2$ のとき, $\theta(n) < (2\log 2)n \cdots (2)$ である。この不等式を帰納法で証明する。

$n \leq n_0 \ (n_0 \geq 2)$ なる全ての n に (2) が成り立っていると仮定する。

$n_0 = 2m$ のとき

$$\begin{aligned} \theta(n_0+1) &= \{\theta(2m+1) - \theta(m+1)\} + \theta(m+1) \\ &< (2\log 2)m + (2\log 2)(m+1) = \\ &= (2\log 2)(2m+1) = (2\log 2)(n_0+1) \end{aligned}$$

n_0 :odd のとき

$$\theta(n_0+1) = \theta(n_0) < (2\log 2)n_0 < (2\log 2)(n_0+1)$$

故に $\theta(n_0+1) < (2\log 2)(n_0+1)$.

帰納法により

$${}^{\forall}n \geq 1 \text{ に対して}, \theta(n) < (2\log 2)n \cdots (2)$$

次に

$$\psi(x) > \frac{\log 2}{4}x \quad (x \geq 2) \cdots (3)$$

を証明する。補題１より

$$N := \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \prod_{p \leq 2n} p^{k_p} \ with$$

$$k_p = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\left[\frac{2n}{p^m} \right] - 2 \left[\frac{n}{p^m} \right] \right) \leq \sum_{m; p^m \leq 2n} 1 = \left[\frac{\log 2n}{\log p} \right]$$

(補題２を使った。)

であるので

$$\log N = \sum_{p \leq 2n} k_p \log p \leq \sum_{p \leq 2n} \left[\frac{\log 2n}{\log p} \right] \log p = \psi(2n).$$

これと

$$N = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{n+1}{1} \frac{n+2}{2} \cdots \frac{2n}{n} \geq 2^n$$

より

$$\psi(2n) \geq (\log 2)n.$$

$n = [\frac{x}{2}]$ と置けば

$$\psi(x) \geq \psi(2n) \geq (\log 2)n \geq \frac{\log 2}{4}x \cdots (3)$$

(2),(3) より定理は従う。□

定理 2

$$\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\log x} \cdots ①, \quad \pi(x) \sim \frac{\psi(x)}{\log x} \cdots ② \quad (x \to \infty)$$

証明 定理１と (1) により①を示せば良い。

$$\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p \leq \log x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \log x \text{ より}$$

$$\pi(x) \geq \frac{\theta(x)}{\log x} \quad (x \geq 2) \cdots (4)$$

$0 <^{\forall} \delta < 1$ に対して

$$\begin{aligned}\theta(x) &\geq \sum_{x^{1-\delta}<p<x} \log p \geq (1-\delta)\log x \sum_{x^{1-\delta}<p<x} 1 \\ &= (1-\delta)\log x\{\pi(x)-\pi(x^{1-\delta})\} \\ &\geq (1-\delta)\log x\{\pi(x)-x^{1-\delta}\}\end{aligned}$$

であるから

$$\pi(x) \leq x^{1-\delta} + \frac{\theta(x)}{(1-\delta)\log x} \quad (x \geq 2)\cdots(5)$$

${}^{\forall}\epsilon > 0$ に対して,

$$0 <^{\exists} \delta := \delta(\epsilon) < 1 \; with \; 1 < \frac{1}{1-\delta} < 1 + \frac{\epsilon}{2}\cdots(6).$$

$x_0 := x_0(\epsilon) := x_0(\delta,\epsilon)$ が存在して $x > x_0$ なる x に対して定理 1 を使って

$$\begin{aligned}&\frac{x^{1-\delta}\log x}{\theta(x)} = \frac{x}{\theta(x)}\frac{\log x}{x^{\delta}} < \frac{1}{c}\frac{\log x}{x^{\delta}} < \frac{\epsilon}{2} \\ &with\; some\; constant : c > 0 \;\cdots(7)\end{aligned}$$

(4),(5) より

$$\begin{aligned}1 &\leq \frac{\pi(x)\log x}{\theta(x)} \leq \left\{x^{1-\delta} + \frac{\theta(x)}{(1-\delta)\log x}\right\}\frac{\log x}{\theta(x)} \\ &= \frac{x^{1-\delta}\log x}{\theta(x)} + \frac{1}{1-\delta} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \left(1+\frac{\epsilon}{2}\right) = 1+\epsilon \quad ((6),(7)\text{ を使った.})\end{aligned}$$

${}^{\forall}\epsilon > 0$ であったから

$$\pi(x) \sim \frac{\theta(x)}{\log x} \quad (x \to \infty).$$

$\square$

定理 2 より $x \to \infty$ のとき

定理 3

$$\text{素数定理}\,(PNT) : \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\psi(x) \sim x$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\theta(x) \sim x$$

$$(x \to \infty)$$

§ 2. Riemann-von Mangoldt の明示公式 explicit formula

補題 3 (Perron1908)

$a > 0, R > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR} \frac{X^s}{s} ds = \begin{cases} 1 + \mathrm{O}\left(\frac{X^a}{R|\log X|}\right), & (\ 1 < X\ ) \\ \frac{1}{2} + \mathrm{O}(\frac{1}{R}) & ,\quad (\ X = 1\ ) \\ 0 + \mathrm{O}\left(\frac{X^a}{R|\log X|}\right), & (\ 0 < X < 1\ ) \end{cases}$$

注 $R \to \infty$ のとき，この積分は絶対収束しない事に注意すべきである。この事が Halphen1883,Cahen1893,1894 をしてアイデアは素晴らしかったが素数定理の証明の失敗に繋がった。Hadamard1896 はこの困難を救うべき絶対収束する積分

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{X^s}{s^\mu} ds \quad (a > 0, \mu > 1)$$

を使用して素数定理の証明に de la Vallée-Poussin1896 と並んで成功した。
注 次が成り立つ：

$a > 0, T > 0, k = 1, 2, \cdots$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iT}^{a+iT} \frac{X^s}{s^{k+1}} ds = \begin{cases} \frac{(\log X)^k}{k!} + \mathrm{O}\left(\frac{X^a}{T^{k+1}|\log X|}\right), & (\ 1 < X\ ) \\ 0 + \mathrm{O}\left(\frac{X^a}{T^{k+1}|\log X|}\right), & (\ 0 < X \leq 1\ ) \end{cases}$$

証明 $|s-a| = R$ なる $s = 0$ を含む円を考え，反時計回りの左半分の半円を $C_l(R)$，同じく右半分の半円を $C_r(R)$ と記す。
$1 < X$ のとき，留数定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{a-iR}^{a+iR} + \int_{C_l(R)}\right\} \frac{X^s}{s} ds = 1$$

であるので

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{X^s}{s}ds = 1-\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l(R)}\frac{X^s}{s}ds.$$

この右辺第2項を評価する。

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_l(R)}\frac{X^s}{s}ds\right| &\leq \frac{X^a}{2\pi}\frac{R}{R-a}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} X^{R\cos\theta}d\theta \\
&= \frac{X^a}{2\pi}\frac{R}{R-a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} X^{-R\sin\theta}d\theta \quad (\cos\theta=\sin(\frac{\pi}{2}-\theta)) \\
&\ \text{Jordan の不等式：} \sin\theta \geq \frac{2}{\pi}\theta\ (0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}) \\
&\ \text{を使って} \\
&\leq \frac{X^a}{2\pi}\frac{R}{R-a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} X^{-\frac{2}{\pi}R\theta}d\theta \\
&= \frac{X^a}{2\pi}\frac{R}{R-a}\left[\frac{X^{-\frac{2}{\pi}R\theta}}{-\frac{2}{\pi}R\log X}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{X^a}{4(R-a)}\frac{1}{\log X}(1-X^{-R}) \ll \frac{X^a}{R\log X} \\
&\ll \frac{X^a}{R\{|\log X|+1\}}
\end{aligned}$$

$0<X<1$ のとき，Cauchy の積分定理より

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{-\int_{a-iR}^{a+iR}+\int_{C_r(R)}\right\}\frac{X^s}{s}ds = 0$$

であるので

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{X^s}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r(R)}\frac{X^s}{s}ds = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{X^{a+Re^{i\theta}}}{a+Re^{i\theta}}d(Re^{i\theta}) \\
&\ll \frac{X^a}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+R^2}}R\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} X^{R\cos\theta}d\theta \quad (\cos\theta\geq 0) \\
&\ll \frac{X^a}{2\pi}2\int_0^{\frac{\pi}{2}} X^{R\cos\theta}d\theta \\
&\ll \frac{X^a}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} X^{R(1-\frac{2}{\pi}\theta)}d\theta
\end{aligned}$$

(再び cos に関する *Jordan* の不等式を使った.)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{X^a X^R}{\pi}\left[\frac{X^{-\frac{2}{\pi}R\theta}}{-\frac{2}{\pi}R\log X}\right]_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{X^a X^R}{-2R\log X}(X^{-R}-1) \\
&= \frac{X^a}{2R|\log X|}X^R(X^{-R}-1) = \\
&= \frac{X^a}{2R|\log X|}(1-X^R) \\
&\leq \frac{X^a}{R|\log X|} \ll \frac{X^a}{R\{|\log X|+1\}}
\end{aligned}
$$

$X=1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{a-iR}^{a+iR}\frac{1}{s}ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-R}^{R}\frac{a-it}{a^2+t^2}idt = \frac{1}{2\pi}\int_{-R}^{R}\frac{a}{a^2+t^2}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{a}{a^2+t^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_0^R \frac{a}{a^2\left(1+\left(\frac{t}{a}\right)^2\right)}d\left(\frac{t}{a}\right)a \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{R}{a}}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\infty}-\int_{\frac{R}{a}}^{\infty}\right\}\frac{du}{1+u^2} \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\arctan(\infty)-\int_{\frac{R}{a}}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\right\} = \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_{\frac{R}{a}}^{\infty}\frac{du}{1+u^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\int_{\frac{R}{a}}^{\infty}\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\int_{\frac{R}{a}}^{\infty}\frac{du}{u^2}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\left[-\frac{1}{u}\right]_{u=\frac{R}{a}}^{\infty}\right) = \frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{a}{R}\right) \\
&= \frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{aX^a}{R\{|\log X|+1\}}\right).
\end{aligned}
$$

補題は証明された。□

Riemann-von Mangoldt の明示公式 explicit formula

$c>1$ として

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds
$$

を考える。

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

は $\sigma=\Re s>1$ で t $(s=\sigma+it)$ について一様に絶対収束している。この事から次の積分と無限和の交換が出来る。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{X^s}{s}ds\\
&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{X}{n}\right)^s}{s}ds\\
&=\left\{\sum_{n<X}+\sum_{n=X}+\sum_{X<n}\right\}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}\frac{\left(\frac{X}{n}\right)^s}{s}ds\\
&=\sum_{n<X}\Lambda(n)\left\{1+\mathrm{O}\left(\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\right)\right\}+\\
&+\Lambda(X)\left\{\frac{1}{2}+\mathrm{O}\left(\frac{c}{T}\right)\right\}+\\
&+\sum_{X<n}\Lambda(n)\mathrm{O}\left(\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\right)\\
&=\sum_{n<X}\Lambda(n)+\frac{1}{2}\Lambda(X)+\sum_{n<X}\Lambda(n)\mathrm{O}\left(\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\right)+\\
&+\sum_{X<n}\Lambda(n)\mathrm{O}\left(\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\right)+\Lambda(X)\mathrm{O}\left(\frac{c}{T}\right)\\
&=:\sum_{n<X}\Lambda(n)+\frac{1}{2}\Lambda(X)+\mathrm{O}(I)+\mathrm{O}(J)+\Lambda(X)\mathrm{O}\left(\frac{c}{T}\right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I\;&:=\;\sum_{n<X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\\
&=\;\sum_{n\le\frac{3}{4}X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}+\\
&\qquad+\sum_{\frac{3}{4}X<n<X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\\
&=:\;I_1+I_2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J &:= \sum_{X<n} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} \\
&= \sum_{n\geq\frac{5}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} + \\
&\quad + \sum_{X<n<\frac{5}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} \\
&=: J_1 + J_2.
\end{aligned}$$

$$c := 1 + \frac{1}{\log X} \implies X^c = e^{c\log X} = e^{(1+\frac{1}{\log X})\log X} = eX,$$

$$\frac{1}{c-1} = \frac{1}{\frac{1}{\log X}} = \log X.$$

と $c > 1$ を選ぶ。

$$\begin{aligned}
I_1 &\equiv \sum_{n\leq\frac{3}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} \\
&\ll \sum_{n\leq\frac{3}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{\frac{3}{4}X}\right)|} \\
&\ll \sum_{n\leq\frac{3}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T} = \frac{X^c}{T} \sum_{n\leq\frac{3}{4}X} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \\
&\ll \frac{X^c}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c} = \frac{X^c}{T} \left\{-\frac{\zeta'}{\zeta}(c)\right\} \asymp \frac{X^c}{T}\frac{1}{c-1} \\
&\quad (-\frac{\zeta'}{\zeta}(c) \asymp \frac{1}{c-1} \ \ (c \to 1+0) \text{ を使った.}) \\
&\asymp \frac{eX}{T}\log X \ll \frac{X}{T}\log X \cdots ①
\end{aligned}$$

次に $\frac{3}{4}X < n < X$ を満たす n の中で the largest prime power:$p^m =: x_1$ と置く。

$n = x_1$ に対して

$$\begin{aligned}
\log\frac{X}{n} &= -\log\frac{n}{X} = -\log\frac{X-(X-x_1)}{X} = -\log\left(1 - \frac{X-x_1}{X}\right) \\
&\geq \frac{X-x_1}{X}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}\Lambda(x_1)\left(\frac{X}{x_1}\right)^c \frac{1}{T|\log\frac{X}{x_1}|} &\ll \log X\left(\frac{X}{\frac{3}{4}X}\right)^c \frac{1}{T\frac{X-x_1}{X}}\\ &\ll \log X\frac{X}{T(X-x_1)}\cdots②\end{aligned}$$

$\frac{3}{4}X<n<x_1<X$ なる n は $n=x_1-\nu$ $with$ $0<\nu<\frac{1}{4}X$ と表わせるので

$$\log\frac{X}{n}\geq\log\frac{x_1}{n}=-\log\frac{n}{x_1}=-\log\frac{x_1-\nu}{x_1}=-\log\left(1-\frac{\nu}{x_1}\right)\geq\frac{\nu}{x_1}$$

となるが，これを使って

$$\begin{aligned}I_2' &:= \sum_{\frac{3}{4}X<n<x_1}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\\ &\ll \sum_{0<\nu<\frac{1}{4}X}\Lambda(x_1-\nu)\left(\frac{X}{\frac{3}{4}X}\right)^c\frac{1}{T\frac{\nu}{x_1}}\ll\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}X}\log X\cdot 1\cdot\frac{X}{T\nu}\\ &= \frac{X\log X}{T}\sum_{0<\nu<\frac{1}{4}X}\frac{1}{\nu}\ll\frac{X\log X}{T}\log(\frac{1}{4}X)\ll\frac{X}{T}(\log X)^2\cdots③\end{aligned}$$

①, ②, ③より

$$\begin{aligned}I &:= \sum_{n<X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\\ &= \sum_{n\leq\frac{3}{4}X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}+\\ &\quad+\sum_{\frac{3}{4}X<n<X}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}\\ &=: I_1+I_2=I_1+\Lambda(x_1)\left(\frac{X}{x_1}\right)^c\frac{1}{T|\log\frac{X}{x_1}|}+I_2'\\ &\ll \frac{X}{T}\log X+\log X\frac{X}{T(X-x_1)}+\frac{X}{T}(\log X)^2\\ &\ll \frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T(X-x_1)}\cdots④\end{aligned}$$

J に対しても x_2 を $X<n<\frac{5}{4}X$ を満たす n を the smallest prime power とすると同様に

$$J := \sum_{X<n}\Lambda(n)\left(\frac{X}{n}\right)^c\frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n \geq \frac{5}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} + \\
&\quad + \sum_{X<n<\frac{5}{4}X} \Lambda(n) \left(\frac{X}{n}\right)^c \frac{1}{T|\log\left(\frac{X}{n}\right)|} \\
&=: J_1 + J_2 \\
&\ll \frac{X}{T}\log X + \log X \frac{X}{T(x_2 - X)} + \frac{X}{T}(\log X)^2 \\
&\ll \frac{X}{T}(\log X)^2 + \log X \frac{X}{T(x_2 - X)} \cdots ⑤
\end{aligned}
$$

④, ⑤より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \\
&= \sum_{n<X} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(X) + \mathrm{O}(I) + \mathrm{O}(J) + \Lambda(X)\mathrm{O}\left(\frac{c}{T}\right) \\
&= \sum_{n<X} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(X) + \mathrm{O}\left(\frac{X}{T}(\log X)^2 + \log X \frac{X}{T\langle X\rangle} + \frac{\log X}{T}\right) \\
&= \sum_{n<X} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(X) + \mathrm{O}\left(\frac{X}{T}(\log X)^2 + \log X \frac{X}{T\langle X\rangle}\right) \\
&= {\sum}'_{n\leq X} \Lambda(n) + \mathrm{O}\left(\frac{X}{T}(\log X)^2 + \log X \frac{X}{T\langle X\rangle}\right) \\
&= \psi_0(X) + \mathrm{O}\left(\frac{X}{T}(\log X)^2 + \log X \frac{X}{T\langle X\rangle}\right) \cdots ⑥ \\
&where\ \langle X\rangle := \min\{|X - p^m| \neq 0 \mid m \in \mathbf{N}, p : prime\} \\
&\qquad \psi_0(X) := {\sum}'_{n\leq X} \Lambda(n) := \sum_{n<X} \Lambda(n) + \frac{1}{2}\Lambda(X) \\
&\qquad c = 1 + \frac{1}{\log X}
\end{aligned}
$$

次に

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds
$$

を積分路を移動する事により留数定理を使って計算する。
$c - iT,\ C + iT,\ -U + iT,\ -U - iT$ を4頂点とする長方形上の積分を考える。U は奇数 odd integer とする。$c + iT$ から $-U + iT$ への積分路を

C_T, $-U+iT$ から $-U-iT$ への積分路を C_{-U}, $-U-iT$ から $c-iT$ への積分路を C_{-T} とすると留数定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{c-iT}^{c+iT}+\int_{C_T}+\int_{C_{-U}}+\int_{C_{-T}}\right\}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds$$
$$=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)$$

であるので

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds$$
$$=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_T}+\int_{C_{-U}}+\int_{C_{-T}}\right\}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds\cdots ⑦$$

$\zeta(s)$ **の主要性質** (5)

$$^\forall m\in\mathbf{N} \text{ に対して } m<^\exists T\leq m+1$$
$$\mathit{with}\ \ \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)\ll(\log T)^2\quad(-1\leq\sigma\leq 2)$$

を使うと

$$\int_{-1+iT}^{c+iT}-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds\ll\log^2 T\int_{-1}^{c}\left|\frac{X^s}{s}\right|d\sigma\ll\frac{\log^2 T}{T}\int_{-\infty}^{c}X^\sigma d\sigma$$
$$=\frac{\log^2 T}{T}\left[\frac{X^\sigma}{\log X}\right]_{\sigma=-\infty}^{c}\ll\frac{\log^2 T}{T}\frac{X^c}{\log X}=\frac{\log^2 T}{T}\frac{Xe}{\log X}\ll$$
$$\ll\frac{X\log^2 T}{T\log X}.$$

$\zeta(s)$ **の主要性質** (6)

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\ll\log(|s|)\quad(\sigma\leq -1)$$

except the circles of radius $\dfrac{1}{2}$

around the trivial zeros :$s=-2,-4,\cdots$ of $\zeta(s)$.

を使うと

$$\int_{-U+iT}^{-1+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \ll \log T\int_{-U}^{-1}\left|\frac{X^s}{s}\right|d\sigma \ll \frac{\log T}{T}\int_{-U}^{-1}X^\sigma d\sigma$$
$$= \frac{\log T}{T}\left[\frac{X^\sigma}{\log X}\right]_{\sigma=-U}^{-1} \ll \frac{\log T}{TX\log X}.$$

従って

$$\int_{-U+iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \ll \frac{X\log^2 T}{T\log X}.$$

同様に

$$\int_{-U-iT}^{c-iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \ll \frac{X\log^2 T}{T\log X}.$$

故に

$$\left\{\int_{C_T}+\int_{C_{-T}}\right\} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \ll \frac{X\log^2 T}{T\log X}\cdots⑧.$$

同様に

$$\int_{C_{-U}} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds = \int_{-U-iT}^{-U+it} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds$$
$$\ll \int_{-T}^{T}\log 2U\frac{X^{-U}}{U}dt$$
$$\ll \frac{T\log U}{UX^U}\cdots⑨$$

⑧, ⑨を⑦に適用して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds$$
$$= X - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) -$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{C_T}+\int_{C_{-U}}+\int_{C_{-T}}\right\} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds$$
$$= X - \sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho} - \sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q} - \frac{\zeta'}{\zeta}(0) -$$
$$+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{T\log U}{UX^U}\right)\cdots⑩$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iT}^{c+iT} -\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{X^s}{s}ds \quad (c=1+\frac{1}{\log X})$$

を二通りの方法：Perron の公式を通じて $\frac{\zeta'}{\zeta}(s)$ の右絶対一様収束平面で計算と積分路を左に移しての留数計算で表わして⑥, ⑩を得た。
⑥, ⑩を等置して

$$\begin{aligned}
&\psi_0(X)+\mathrm{O}\left(\frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T\langle X\rangle}\right)\\
&=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)+\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{T\log U}{UX^U}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad&\\
&\psi_0(X)=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)+\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T\langle X\rangle}+\frac{T\log U}{UX^U}\right)
\end{aligned}$$

従って次の定理を得る。

定理 4

$X\gg 1, U: odd\ integer \gg 1$ に対して

$$\begin{aligned}
&\psi_0(X)=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{0<2q<U}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)+\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T\langle X\rangle}+\frac{T\log U}{UX^U}\right)
\end{aligned}$$

ここで $U\to\infty$ とすると

$$\begin{aligned}
&\psi_0(X)=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\sum_{q=1}^{\infty}\frac{X^{-2q}}{-2q}-\frac{\zeta'}{\zeta}(0)+\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T\langle X\rangle}\right)\\
\Longleftrightarrow\quad&\\
&\psi_0(X)=X-\sum_{|\gamma|<T}\frac{x^\rho}{\rho}-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{X^2}\right)-\log 2\pi+\\
&+\mathrm{O}\left(\frac{X\log^2 T}{T\log X}+\frac{X}{T}(\log X)^2+\log X\frac{X}{T\langle X\rangle}\right)
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{\zeta'}{\zeta}(0) = \log 2\pi \text{である．}\right)$$

定理4で $U \to \infty,\ T \to \infty$ とすると

定理 5（Riemann-von Mangoldt の明示公式 explicit formula）

$$\psi_0(X) = X - \lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma|<T} \frac{X^\rho}{\rho} - \frac{1}{2}\log\left(1 - \frac{1}{X^2}\right) - \log 2\pi \quad (X \geq 2)$$

注 $\sum_\rho \frac{x^\rho}{\rho}$ は絶対収束しないので $\frac{x^\rho}{\rho}$ と $\frac{x^{\overline{\rho}}}{\overline{\rho}}$ を上記の様に対称的に加える必要がある。

上記式で $\psi_0(X), X, \frac{1}{2}\log(1 - X^{-2}), \log 2\pi$ は有限であるから

$$\lim_{T\to\infty} \sum_{|\gamma|<T} \frac{X^\rho}{\rho}$$

は収束している。

Hadamard の整関数 $f(z)$ の位数 $\mathrm{ord}(f)$ に関する定理:

$$\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^{\mathrm{ord}(f)}} \quad (\rho\text{は整関数 } f \text{ の零点})$$

は発散し

任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\sum_\rho \frac{1}{|\rho|^{\mathrm{ord}(f)+\epsilon}} \quad (\rho\text{は整関数 } f \text{ の零点})$$

は収束する。

に依る。[3] 下巻 p.1-4,§ 5.1

注 Riemann が元々導き出した明示公式は

$$\Pi(X) := \sum_{p^m<X} \frac{1}{m} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(X^{\frac{1}{n}})}{n} = \sum_{n<X} \frac{\Lambda(n)}{\log n}$$

$$= \mathrm{li}(X) - \sum_{\substack{\rho\ : \\ \Im\rho>0}} (\mathrm{li}(X^\rho) + \mathrm{li}(X^{\overline{\rho}})) + \int_X^\infty \frac{dy}{(y^2-1)y\log y} - \log 2$$

$$where\ \ \mathrm{li}(X^{\alpha+i\beta}) := \int_{(-\infty+i\beta)\log X}^{(\alpha+i\beta)\log X} \frac{e^z}{z}dz + \epsilon\pi i,$$

$$\epsilon := \epsilon(\beta) := \mathrm{sgn}(\beta) := \begin{cases} +1, & (\beta > 0) \\ \ \ 0, & (\beta = 0) \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \\ -1, & (\beta < 0) \end{cases}$$

$\beta=0$ のときは

$\mathrm{li}(X)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_0^{1-\epsilon}+\int_{1+\epsilon}^{X}\right)\frac{dt}{\log t}=\int_2^X\frac{dt}{\log t}-1.04\cdots,$

X が $prime\ power:\ p^m$ のときは $\Pi(X)$ を

$\lim_{h\to 0+0}\frac{\Pi(X+h)+\Pi(X-h)}{2}$

と定義する。

[3] 下巻 $p.157-170, \S 6.3$ フォン・マンゴルトの定理再論, $p.245-247$, 訳者による補遺：脚注 40, 41, 42. 及び [5]

注 Riemann の明示公式の Landau による対数関数の多価性を使う証明は秀逸で美しく短い。しかも $\mathrm{li}(X)$ の定義の理由を明らかにしている。
[3] 下巻 p.159,160, p.245-247, 訳者による補遺：脚注 40,41,42.　及び [5]

§ 3. Riemann 予想 the Riemann Hypothesis

定理 5 (**Riemann-von Mangoldt の明示公式 explicit formula**)

$$\psi_0(X)=X-\lim_{T\to\infty}\sum_{|\gamma|<T}\frac{X^\rho}{\rho}-\frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{X^2}\right)-\log 2\pi\quad (X\geq 2)$$

に於いて,
「$\beta=\Re\rho<1$ 即ち垂直線 $\sigma=\Re s$ 上に $\zeta(s)$ の零点が存在しなければ定理 5 に於いて X が主要項となるので素数定理が従う」
と良く書いてあるが，これでは不十分である。と云うのは

$$\limsup_{\beta}\beta=1$$

かも知れないからである。
$\beta=\Re\rho<1$ 即ち垂直線 $\sigma=\Re s=1$ 上に $\zeta(s)$ の零点が存在しなければ $\max_{|\gamma|<T}\beta<1$ であるから，仮令

$$\limsup_{\beta}\beta=1$$

であったとしても

$$\limsup_{\beta}\beta=1=\lim_{\gamma\to+\infty}\beta$$

である。

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{|\gamma|<T}\frac{X^\rho}{\rho}=\sum_{|\gamma|<T}\frac{X^\rho}{\rho}+\sum_{|\gamma|\geq T}\frac{X^\rho}{\rho}=\mathrm{O}(X^{1-\epsilon(T)})+\delta$$
$$where\ 1-\epsilon(T)=\max_{|\gamma|<T}\beta<1,\ \delta\ll 1$$

$\delta\ll 1$ は $\displaystyle\lim_{T\to\infty}\sum_{|\gamma|<T}\frac{X^\rho}{\rho}$ が収束するからである。

このようにすれば，定理５の右辺第１項：X は確かに主要項となり，定理３より素数定理が従う。
$\zeta(s)$ の複素零点 (非自明な零点)ρ は，$s\in\mathbf{R}$ ならば $\zeta(s)\in\mathbf{R}$ であるから ρ が零点ならば $\overline{\rho}$ も零点であり，また $\zeta(s)$ の関数等式より ρ が零点ならば $1-\rho$ も零点である。このことから，複素零点 ρ は実軸と垂直線 $\Re s=\frac{1}{2}$ に対して対称に，そして点 $s=\frac{1}{2}$ に対しても対称に分布している事が分かる。
これらのことから，定理５の右辺第２項：

$$\lim_{T\to\infty}\sum_{|\gamma|<T}\frac{X^\rho}{\rho}$$

が一番小さくなるのは $^\forall\rho$ に対して $\Re\rho=\frac{1}{2}$ のときである事が分かる。これが Riemann 予想である。

§ 4. 素数定理の証明

§ 3. から素数定理の証明は，$\Re s=1$ 上に $\zeta(s)$ の零点が存在しない事を云えば良い。

Ramanujan の等式 [25]p.8,(1.3.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}=\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-(a+b))}{\zeta(2s-(a+b))}$$
$$(\ \sigma=\Re s>\max\{1,\Re a+1,\Re b+1,\Re(a+b)+1\}\ )$$
$$where\ \sigma_a(n):=\sum_{d|n}d^a\quad (a\in\mathbf{C})$$

証明 右辺を Euler 積として展開すると左辺となる。□

$\Re s=1$ に $\zeta(s)$ の零点が存在しない事の証明 (Ingham,A.E.1930 [23], [21]) Ramanujan の等式で $a=-b=it$ と置くと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{it}(n)|^2}{n^s}=\frac{\zeta(s)^2\zeta(s-it)\zeta(s+it)}{\zeta(2s)}\quad(\sigma>1)$$

ここで $s=1$ ($s\to 1+0$) と置くと

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{it}(n)|^2}{n}=\lim_{s\to 1+0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sigma_{it}(n)|^2}{n^s}=\frac{\zeta(1)^2\zeta(1-it)\zeta(1+it)}{\zeta(2)}$$

$1+it$ が $\zeta(s)$ の零点即ち $\zeta(1+it)=0$ とすると $1-it$ も

零点となり，右辺分子は $s=1$ の $\zeta(s)$ の 1 位の極と

打ち消し合って右辺は有限となる。

しかし，左辺の正係数の Dirichlet 級数は Landau の定理により，

$s=1$ で特異点を持ち発散する。

これは矛盾であるので $1+it$ が $\zeta(s)$ の零点となる事はない。□

注

Landau の定理 [3] 下巻 p.53, 定理 5.15

非負係数の Dirichlet 級数の絶対収束座標と実軸の交点は，この級数が表わす解析関数の特異点である。

これは非負係数を持つ冪級数に関する収束円と正の実軸の交点がこの冪級数が表わす解析関数の特異点であると云う

Vivanti(1893)-Pringsheim(1894) の定理 [26]p.168 の Dirichlet 級数版である。

§ 5. 補遺：幾つかの証明

$\zeta(s)$ の主要性質

(4)

$$N(T)\ll\log T\quad(T>2),$$

(5)

$$\sum_{\rho}\frac{1}{1+(T-\gamma)^2}\ll\log T\quad(T>2),$$

$$\sum_{|T-\gamma|\geq 1}\frac{1}{(T-\gamma)^2}\ll\log T\quad(T>2),$$

(6)

(7)
$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho}+\mathrm{O}(\log t)\quad(-1\le\sigma\le 2, t>2),$$

$^{\forall}m\in\mathbf{N}$ に対して $m<^{\exists}T\le m+1$ *with*
$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT)\ll(\log T)^2\quad(-1\le\sigma\le 2),$$

(8)
$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it)\ll\log(|s|)\quad(\sigma\le -1)\ \text{ except the circles}$$
of radius $\frac{1}{2}$around the trivial zeros :$s=-2,-4,\cdots$ of $\zeta(s)$.

(4) の証明 (Landau1908, [3] 下巻 p.158, 補題 6.9)
$\zeta(s)$ **の主要性質** (3)

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\ &=\ \left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)-\frac{1}{s-1}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}+1)+\\ &\quad+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\},\end{aligned}$$

$\Gamma(s)$ **の主要性質** (3)

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1)=\log(s+1)-\frac{1}{2(s+1)}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$$

より

$$\begin{aligned}\frac{\zeta'}{\zeta}(s)&=\left(\log 2\pi-1-\frac{\gamma_0}{2}\right)-\frac{1}{s-1}+\mathrm{O}(\log t)+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}\\ &=\mathrm{O}(\log t)+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}\quad for\ t>2.\end{aligned}$$

ここで $s=2+iT$ を代入して

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(2+iT)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^{2+iT}}\ll\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^2}\ll 1$$

を使うと

$$\mathrm{O}(1)\ =\ \frac{\zeta'}{\zeta}(2+iT)=\mathrm{O}(\log T)+\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \\
\mathrm{O}(\log T) &= \sum_{\rho} \Re\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \sum_{\rho} \Re\left\{\frac{1}{(2-\beta)+i(T-\gamma)}+\frac{1}{\beta+i\gamma}\right\} \\
&= \sum_{\rho} \left\{\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right\} \\
&> \sum_{\rho} \frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2} > \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2} \\
&> \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{1}{2^2+1} \\
&= \frac{1}{2^2+1} \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 = N(T+1)-N(T). \ \square
\end{aligned}
$$

(5) の証明

(4) の証明の途中より

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(\log T) &= \sum_{\rho} \Re\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \sum_{\rho} \Re\left\{\frac{1}{(2-\beta)+i(T-\gamma)}+\frac{1}{\beta+i\gamma}\right\} \\
&= \sum_{\rho} \left\{\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right\} \\
&> \sum_{\rho} \frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2} = \frac{1}{4}\sum_{\rho} \frac{1}{1+\frac{(T-\gamma)^2}{4}} \\
&> \frac{1}{4}\sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \gg \sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2},
\end{aligned}
$$

後半は

$$x \ge 1 \Longrightarrow \frac{1}{1+x} \ge \frac{1}{2x}$$

に注意して

$$
\begin{aligned}
\mathrm{O}(\log T) &= \sum_{\rho} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} > \sum_{|T-\gamma|\ge 1} \frac{1}{1+(T-\gamma)^2} \\
&> \sum_{|T-\gamma|\ge 1} \frac{1}{2(T-\gamma)^2} \gg \sum_{|T-\gamma|\ge 1} \frac{1}{(T-\gamma)^2}. \ \square
\end{aligned}
$$

(6) の証明

(4) の証明の途中より

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \left(\log 2\pi - 1 - \frac{\gamma_0}{2}\right) - \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \quad for\ t > 2.$$

であるが，これとこれに $s = 2 + it$ を代入したものを作り：

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$-)\ \mathrm{O}(1) = \frac{\zeta'}{\zeta}(2 + it) = \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{2+it-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}$$
$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\}$$

と辺〃差し引く:

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma + it) = \mathrm{O}(\log t) + \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\}$$
$$= \mathrm{O}(\log t) +$$
$$+ \left\{\sum_{|t-\gamma|<1} + \sum_{|t-\gamma|\geq 1}\right\} \left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\}$$

この右辺第3項の絶対値は

$$\left|\sum_{|t-\gamma|\geq 1} \left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\}\right| < \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \left|\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right| =$$
$$= \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \frac{2-\sigma}{|(s-\rho)(2+it-\rho)|} =$$
$$= \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \frac{2-\sigma}{|(\sigma-\beta)+i(t-\gamma)||(2-\beta)+i(t-\gamma)|}$$
$$< \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \frac{2-\sigma}{|t-\gamma||t-\gamma|} < \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \frac{3}{|t-\gamma||t-\gamma|}$$

($-1 \leq \sigma \leq 2$ を使った.)

$$= 3 \sum_{|t-\gamma|\geq 1} \frac{1}{(t-\gamma)^2} \ll \log t \quad ((5) \text{ を使った.})$$

従って

$$
\begin{aligned}
&\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) = \mathrm{O}(\log t) + \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \left\{\sum_{|t-\gamma|<1} + \sum_{|t-\gamma|\geq 1}\right\}\left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\left\{\frac{1}{s-\rho} - \frac{1}{2+it-\rho}\right\} + \mathrm{O}(\log t) \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} - \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{2+it-\rho} + \mathrm{O}(\log t) \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} - \sum_{|t-\gamma|<1}\mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right) + \mathrm{O}(\log t) \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right)\sum_{|t-\gamma|<1} 1 + \mathrm{O}(\log t) \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{t}\right)\mathrm{O}(\log t) + \mathrm{O}(\log t) \quad \text{((4) を使った.)} \\
&= \mathrm{O}(\log t) + \\
&+ \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}\left(\frac{\log t}{t}\right) + \mathrm{O}(\log t) \\
&= \sum_{|t-\gamma|<1}\frac{1}{s-\rho} + \mathrm{O}(\log t). \quad \square
\end{aligned}
$$

(7) の証明 (Landau1908, [3] 下巻 p.159, 訳者による脚注 38)
垂直線区間 $[im, i(m+1)]$ を $N(m+1) - N(m) + 1 = \mathrm{O}(\log m)$ 個に等小分割すると，この分割区間の中には $\zeta(s)$ の零点が含まれない小分割区間が存在し，その小分割区間に一番近い零点を ρ_0 とし，その小区間内の垂直に等分した点を $s = \sigma + iT$, $-1 \leq \sigma \leq 2$, $m < T \leq m+1$ すると
$|s-\rho| \geq |s-\rho_0| \geq \frac{1}{2(N(m+1)-N(m)+1)} \gg \frac{1}{\log m} \asymp \frac{1}{\log T}$ となる。((4) を使っ

た.) これと (6) より

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+iT) &= \sum_{|T-\gamma|<1} \frac{1}{(\sigma+iT)-(\beta+i\gamma)} + \mathrm{O}(\log T) = \\
&= \sum_{|T-\gamma|<1} \mathrm{O}\left(\frac{1}{\frac{1}{\log T}}\right) + \mathrm{O}(\log T) = \sum_{|T-\gamma|<1} \mathrm{O}(\log T) + \mathrm{O}(\log T) = \\
&= \mathrm{O}(\log T) \sum_{|T-\gamma|<1} 1 + \mathrm{O}(\log T) = \\
&= \mathrm{O}(\log T)\mathrm{O}(\log T) + \mathrm{O}(\log T) \ll \mathrm{O}((\log T)^2) \quad ((4) \text{ を使った.}).
\end{aligned}$$

□

(8) の証明

$\zeta(s)$ **の主要性質** (1) 関数等式

$$\frac{\zeta'}{\zeta}(s) := \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log 2\pi + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}s - \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \frac{\zeta'}{\zeta}(1-s),$$

$\Gamma(s)$ **の主要性質** (3)

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{|s|^2}\right)$$

より，$\sigma \le -1 \longrightarrow 1-\sigma \ge 2$ を使って

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta'}{\zeta}(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(\sigma+it) &= \log 2\pi + \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}s + \mathrm{O}(\log|s|) + \mathrm{O}(1) \\
&= \frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}s + \mathrm{O}(\log|s|)
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{\pi}{2}\cot\frac{\pi}{2}s \ll 1$$

を示せば良い。$t \gg 1$ とする。

$$\begin{aligned}
|\cot\frac{\pi}{2}s| &= \left| i\frac{e^{\frac{\pi}{2}is}+e^{-\frac{\pi}{2}is}}{e^{\frac{\pi}{2}is}-e^{-\frac{\pi}{2}is}} \right| = \left| \frac{e^{\pi is}+1}{e^{\pi is}-1} \right| = \left| \frac{e^{\pi i(\sigma+it)}+1}{e^{\pi i(\sigma+it)}-1} \right| = \\
&= \left| \frac{e^{-\pi t}e^{\pi i\sigma}+1}{e^{-\pi t}e^{\pi i\sigma}-1} \right| = \left| \frac{e^{-\pi t}e^{\pi i\sigma}+1}{1-e^{-\pi t}e^{\pi i\sigma}} \right| < \frac{2}{1-e^{-\pi t}} \ll 1. \quad \square
\end{aligned}$$

解析数論で良く使用される次の便利な補題がある。

補題 4 (Abel 和)　[22]p.114, 定理 4.8.

$x \geq 1, \phi(x)$ は C^1級, $A(x) := \sum_{n \leq x} a_n$ とするとき

(i)　$$\sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = A(x)\phi(x) - \int_1^x A(t)\phi'(t)dt,$$

(ii)　$$\sum_{x<n \leq y} a_n \phi(n) = A(y)\phi(y) - A(x)\phi(x) - \int_x^y A(t)\phi'(t)dt,$$

(iii)　$$\sum_{n>x} a_n \phi(n) = -A(x)\phi(x) - \int_x^\infty A(t)\phi'(t)dt.$$

但し, (ii) では $A(x)\phi(x) \to 0 \ (x \to \infty)$ で, 且つ, 無限積分：$\int_x^\infty A(t)\phi'(t)dt$ は存在すると仮定する。

証明 (Landau)

$$A(x)\phi(x) - \sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = \sum_{n \leq x} (a_n \phi(x) - a_n \phi(n))$$
$$= \sum_{n \leq x} \int_n^x a_n \phi'(t)dt$$
$$= \int_1^x \sum_{n \leq t} a_n \phi'(t)dt \cdots (*)$$
$$= \int_1^x A(t)\phi'(t)dt$$

これで (i) が証明された。(ii) については (i) より次の二つを作り辺〃差し引く：

$$A(y)\phi(y) - \sum_{n \leq y} a_n \phi(n) = \int_1^y A(t)\phi'(t)dy$$
$$-)\ A(x)\phi(x) - \sum_{n \leq x} a_n \phi(n) = \int_1^x A(t)\phi'(t)dy$$
$$\overline{\hspace{20em}}$$
$$A(y)\phi(y) - A(x)\phi(x) - \sum_{x<n \leq y} a_n \phi(n) = \int_x^y A(t)\phi'(t)dt$$

これは (ii) である。(iii) については (ii) で $y \to \infty$ とすれば良い。
上記 (*) については次のように計算される。

$$\int_1^x \sum_{n \leq t} \phi'(t)dt$$
$$= \sum_{n=1}^{[x]-1} \int_n^{n+1} (a_1 + \cdots + a_n)\phi'(t)dt + \int_{[x]}^x (a_1 + \cdots + a_{[x]})\phi'(t)dt$$

$=$

$\phi'(t)$ が連続である事から $t \in \mathbf{N}$ を含む無限小区間積分は

0となるので，このような分割は正当化される。

$$= \sum_{n=1}^{[x]-1} \left\{ \int_n^x (a_1 + \cdots + a_n)\phi'(t)dt - \right.$$

$$\left. - \int_{n+1}^x (a_1 + \cdots + a_n)\phi'(t)dt \right\} + \int_{[x]}^x (a_1 + \cdots + a_{[x]})\phi'(t)dt$$

$$= \int_1^x a_1\phi'(t)dt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{[x]-1} \left\{ - \int_{n+1}^x (a_1 + \cdots + a_n)\phi'(t)dt + \right.$$

$$\left. + \int_{n+1}^x (a_1 + \cdots + a_{n+1})\phi'(t)dt \right\}$$

$$= \int_1^x a_1\phi'(t)dt + \sum_{n=1}^{[x]-1} \int_{n+1}^x a_{n+1}\phi'(t)dt$$

$$= \int_1^x a_1\phi'(t)dt + \int_2^x a_2\phi'(t)dt + \cdots + \int_{[x]}^x a_{[x]}\phi'(t)dt$$

$$= \sum_{n \le x} \int_n^x a_n\phi'(t)dt. \quad \square$$

別証明 [2]p.6, 定理 4.

(i) を証明する。

$$\begin{aligned}
\sum_{n \le x} a_n\phi(n) &= \sum_{n=1}^{[x]} a_n\phi(n) = \sum_{n=1}^{[x]} (A(n) - A(n-1))\phi(n) \\
&= \sum_{n=1}^{[x]-1} A(n)(\phi(n) - \phi(n+1)) + A([x])\phi([x]) \\
&= \sum_{n=1}^{[x]-1} A(n) \int_{n+1}^{n} \phi'(t)dt + A([x])\phi([x]) \\
&= -\sum_{n=1}^{[x]-1} \int_n^{n+1} A(t)\phi'(t)dt + A([x])\phi([x]) \\
&= -\int_1^{[x]} A(t)\phi'(t)dt + A([x])\phi([x]) \\
&= -\int_1^x A(t)\phi'(t)dt + \int_{[x]}^x A([x])\phi'(t)dt + A([x])\phi([x]) \\
&= -\int_1^x A(t)\phi'(t)dt + A([x]) \int_{[x]}^x \phi'(t)dt + A([x])\phi([x])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\int_1^x A(t)\phi'(t)dt + A([x])(\phi(x)-\phi([x])) + \\
&\quad +A([x])\phi([x]) \\
&= -\int_1^x A(t)\phi'(t)dt + A([x])\phi(x) \\
&= -\int_1^x A(t)\phi'(t)dt + A(x)\phi(x). \quad \Box
\end{aligned}$$

補題 5 Ramanujan の等式 [25]p.8,(1.3.3)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s} =$$

$$\frac{\zeta(s)\zeta(s-a)\zeta(s-b)\zeta(s-(a+b))}{\zeta(2s-(a+b))}$$

$$(\ \sigma = \Re s > \max\{1, \Re a+1, \Re b+1, \Re(a+b)+1\}\ )$$

$$\begin{aligned}
where\ \sigma_a(n) &:= \sum_{d|n} d^a \quad (a \in \mathbf{C}) \\
&= \prod_{p^{m_p}\|n}\frac{1-p^{(m_p+1)a}}{1-p^a} \\
&= \prod_{p^{m_p}\|n}\{1+p^a+p^{2a}+\cdots+p^{m_p a}\},
\end{aligned}$$

$$p^{m_p}\parallel n \Longleftrightarrow p^{m_p}|n, \quad p^{m_p+1}\not| n.$$

$$(m,n)=1 \Longrightarrow \sigma_a(mn)=\sigma_a(m)\sigma_a(n)\ (\sigma_a\text{は乗法的})$$

証明 右辺を Euler 積として展開すると左辺となる。$p^{-s} =: z$ と置く。

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \prod_p \frac{1-p^{-2s+a+b}}{(1-p^{-s})(1-p^{-s+a})(1-p^{-s+b})(1-p^{-s+a+b})} \\
&= \prod_p \frac{1-p^{a+b}z^2}{(1-z)(1-p^a z)(1-p^b z)(1-p^{a+b}z)} \\
&= \prod_p \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\left\{\frac{1}{1-z} - \frac{p^a}{1-p^a z} - \frac{p^b}{1-p^b z} + \frac{1-p^{a+b}}{1-p^{a+b}z}\right\}
\end{aligned}$$

(部分分数展開による.)

$$= \prod_p \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)}\left\{\sum_{m=0}^{\infty}(1-p^{(m+1)a}-p^{(m+1)a}+p^{(m+1)(a+b)})z^m\right\}$$

$$(\ \frac{1}{1-x} = \sum_{m=0}^{\infty} x^m,\ |x|<1.)$$

$$
\begin{aligned}
&= \prod_p \frac{1}{(1-p^a)(1-p^b)} \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (1-p^{(m+1)a})(1-p^{(m+1)b}) z^m \right\} \\
&= \prod_p \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1-p^{(m+1)a}}{1-p^a} \frac{1-p^{(m+1)b}}{1-p^b} z^m \right\} \\
&= \prod_p \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1-p^{(m+1)a}}{1-p^a} \frac{1-p^{(m+1)b}}{1-p^b} p^{-ms} \right\} \\
&= \prod_p \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{(}p^m)\sigma_b(p^m)(p^m)^{-s} \right\} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_a(n)\sigma_b(n)}{n^s}. \ (\sigma_a(n),\ \sigma_b(n) \text{ の乗法性を使った.}) \quad \square
\end{aligned}
$$

参考文献

[1] 内山三郎 Uchiyama,S.:『素数の分布』宝文館，1970, (iii+230)pp.. *Distribution of Prime Numbers* (in Japanese), Houbun-Kan, Tokyo.

[2] 三井孝美 Mitsui,T.:『整数論；解析的整数論入門』至文堂，1970. *Number Theory; Introduction to Analytic Number Theory* (in Japanese), Shibunndo, Tokyo, 1970.

[3] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』，丸善出版，訂正版 2014, 2012,『素数定理の進展・下』，丸善出版，2013)

[4] Davenport,H.: *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1980(1967), (xiii+177)pp..

[5] 中嶋眞澄 Nakajima,M.:Riemann の Zeta 関数に関する von Mangoldt の明示公式の新しい証明と Riemann の明示公式，鹿児島経済論集，第 56 巻第 1-4 号合併号 (2016)，1-10.
A New Proof of von Mangoldt's Explicit Formula and Riemann's Explicit Formula for the Riemann Zeta-function, *Kagoshima Journal of Economics*, **56**(2016), 1-10.

[6] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 A Mean Value Integral, 鹿児島経済論集，第 59 巻 1 号, 2018 年 10 月, 1-31, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, October 2018, 1-31.

[7] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (II) A Mean Value Integral(II), 鹿児島経済論集，第 59 巻 2 号, 2018 年 12 月, 141-154, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, December 2018, 141-154.

[8] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 61-76.

[9] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 不完全 Gamma 関数の漸近公式 Asymptotic Formula of the Incomplete Gamma Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2020 年 3 月, 555-560, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 555-560.

[10] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III: 補遺); 実軸上或いは実軸近くの零点, A Mean Value Integral(III:Appendix); Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Riemann Zeta-Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 265-303, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 265-303 .

[11] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 21-60, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 21-60.

[12] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の Landau-Page-Siegel-龍沢零点, Landau-Page-Siegel-Tatuzawa's Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 2 号, 2019 年 9 月, 153-193, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 153-193.

[13] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Ramanujan の L_τ 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Ramanujan's L_τ-Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻 2 号, 2019 年 9 月, 195-240, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 195-240.

[14] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with cusp form f, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 305-350, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 305-350.

[15] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Maass 尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with Maass cusp form f, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 351-405, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 351-405.

[16] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dedekind の Zeta 関数の実軸から「離れている」非自明な零点，Non-Trivial Zeros that are "not near" the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 407-451, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 407-451.

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dedekind の Zeta 関数の実軸上或いは実軸に近い非自明な零点，Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2020 年 3 月, 561-606, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 561-606.

[18] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Hecke の放射類群指標を持つ L-関数の非自明な零点，Non-Trivial Zeros of Hecke's L-Functions with ray class group character, 鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2020 年 3 月, 607-652, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 607-652.

[19] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Hecke の量指標を持つ L-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L-Functions with Hecke's Grössencharakter, 鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2019 年 3 月, 653-698, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 653-698.

[20] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Artin の L-関数の非自明な零点及び極，Non-Trivial Zeros and Poles of Artin's L-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2019 年□月, □-□, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, □ 2019, □-□.

[21] Bump,D.: The Rankin-Selberg Method: Survey in *Number Theory, Trace Formulas and Discrete Groups* (*Symposium in Honor of*

Atle Selberg Oslo, Norway, July 14-21, 1987), ed. by Aubert,K.E., Bombieri,E. and Goldfeld,D., Academic Press, 1989, (xx+510)pp., p.49-109, especially in page 51.

[22] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[23] Ingham,A.E.: Note on Riemann's ζ-function and Dirichlet's L-functions, J.London Math. Soc. **5**(1930), 107-112.

[24] Ingham,A.E.: *The Distribution of Prime Numbers*, Cambridge Univ. Press, 1932.

[25] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

[26] 辻正次, 小松勇作, 田村二郎, 小沢満, 祐乗坊瑞満, 水本久夫：『大学演習函数論』, 裳華房, 1959, (vi+356)pp..

(April 3 2021.) (received 26 January 2022.)