Kurzweil-Henstock積分に於ける 絶対可積分と(条件)可積分

Absolute Integrability and (Conditional) Integrability in the Kurzweil-Henstock Integral

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We give here some relations between absolute integrability and conditional integrability in the Kurzweil-Henstock integral.

Key words ; Kurzweil-Henstock integral.
Mathematics Subject Classification ; 26A39.

定義 1 関数 $f : I := [a,b] \to \mathbf{R},\ -\infty \le a < b \le +\infty$ が(クルツヴァイル Kurzweil-ヘンストック Henstock の意味で) 可積分 (K-H 可積分と略記) でその積分値が実数 A であるとは，次の性質を満たすときを云う:

全ての $\varepsilon > 0$ に対して正値関数 $\delta : I := [a, b] \to \mathbf{R}$ が存在して ($\delta := \delta(x)$ を gauge(関数) と云う.),

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{m-1} < a_m = b\,,$$

$$x_j - \delta(x_j) \leq a_{j-1} \leq x_j \leq a_j \leq x_j + \delta(x_j)\,.$$

を満たす全ての a_j, x_j に対して

$$\left| \sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1}) - A \right| \leq \varepsilon\,,$$

を満たす。そして，この A を

$$\int_I f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

と書いて，関数 $f = f(x)$ の区間 $I = [a, b]$ 上の *Kurzweil-Henstock* 積分 (K-H 積分と略記) と云う。

註１ $b = +\infty$ *or* $a = -\infty$ の場合は，Riemann 和 $\sum_{j=1}^{m} f(x_j)(a_j - a_{j-1})$ を少し変更せねばならない。

註２ Kurzweil-Henstock 積分は Lebesgue 積分 (L-可積分と云う) を含んでいて (定義から直ちに Riemann 積分も含む事が分かる) 次が成り立つ：
関数 $f : I := [a, b] \to \mathbf{R}$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ について

$$f \text{ が } I \text{ で } Lebesgue \text{ 可積分} \iff f,\ |f| \text{ が } I \text{ で } Kurzweil-Henstock \text{ 可積分}$$

良く知られているように，Lebesgue 可積分の定義から，
$f : I \to \mathbf{R}$ が与えられた given とき

$$f \text{ が } I \text{ で } Lebesgue \text{ 可積分} \iff |f| \text{ は } I \text{ で } Lebesgue \text{ 可積分} \quad \cdots (1)$$

となるが，これは不自然である。
しかし，無限級数では絶対収束すれば，元の級数も収束する。即ち：

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ が収束} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ も収束.} \quad \cdots (2)$$

一方，Riemann 積分では積分が絶対収束しても，元の積分が (条件) 収束するとは限らない：

例 Dirichlet 関数類似の $f : I := [0,1] \to \mathbf{R}$ を

$$f(x) := \begin{cases} +1 & (x \in \mathbf{Q}) \\ -1 & (x \notin \mathbf{Q}) \end{cases}$$

と定義すると，$|f(x)|$ は明らかに $[0,1]$ で Riemann 可積分 Riemann integrable であるが, $f(x)$ は Riemann 可積分ではない not Riemann integrable。そこで問題として次が考えられる：

問題

$$|f| \text{ が } I \text{ で Kurzweil–Henstock 可積分}$$
$$\Longrightarrow$$
$$f \text{ も } I \text{ で Kurzweil–Henstock 可積分か？}$$

f^+, f^-, E^+, E^-, E を次で定義する：

$$f^+ := f^+(x) := \begin{cases} f(x) & (f(x) \geq 0) \\ 0 & (f(x) < 0) \end{cases},$$
$$f^- := f^-(x) := \begin{cases} -f(x) & (f(x) < 0) \\ 0 & (f(x) \geq 0) \end{cases},$$
$$E^+ := \{x \in E \ ; \ f^+(x) = f(x) \ \},$$
$$E^- := \{x \in E \ ; \ f^-(x) = -f(x) \ \},$$
$$E := E^+ \cup E^-, \ E^+ \cap E^- = \emptyset.$$

このように定義すると，

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x), \quad f(x) = f^+(x) - f^-(x)$$

である。

補題 1 ([3]p.132, **定理 2.46**)

$E_k \subset \mathbf{R}^N$ を互いに重ならない有限または可算無限個の (Lebesgue) 可測部分集合 (Lebesgue) measurable subsets ([3]p.77, **定義 2.6**, [2]p.311) とし，その和集合は E に等しいとする。このとき，

$$f \text{ は } E \text{ 上 } L\text{–可積分} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a) f \text{ は各 } E_k \text{上で } L - \text{可積分；} \\ (b) \sum_k \int_{E_k} |f(\boldsymbol{x})| \, d\boldsymbol{x} < +\infty. \end{cases}$$

そして，

$$\int_E f = \sum_k \int_{E_k} f\,.$$

である。

この補題を使うと，次の定理が得られる：

定理 1　E, E^+ を可測集合 measurable sets とする (E^- も可測 measurable となる) 。このとき，

$$|f|\text{ は } E \text{ 上 } \mathrm{K-H} \text{ 可積分} \Longrightarrow f \text{ も } E \text{ 上 } \mathrm{K-H} \text{ 可積分}$$

が成り立つ。

証明　**補題 1** で，f を $|f|$, E_1, E_2 を $E_1 = E^+, E_2 = E^-$ と置く。すると $E = E^+ \cup E^-$, $E^+ \cap E^- = \emptyset$ であり，

$$|f|\text{ は } E \text{ 上 } \mathrm{K-H} \text{ 可積分} \Longleftrightarrow \begin{cases} (a)\ |f| \text{ は } E^+, E^- \text{上で } \mathrm{K-H} \text{ 可積分；} \\ (b)\ \int_{E^+} |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} + \int_{E^-} |f(\boldsymbol{x})|\, d\boldsymbol{x} < +\infty \end{cases}$$

そして，

$$\int_E |f| = \int_{E^+} |f| + \int_{E^-} |f| = \int_{E^+} f^+ + \int_{E^-} f^-\,.$$

である。これより，$\int_{E^+} |f| = \int_{E^+} f^+$, $\int_{E^-} |f| = \int_{E^-} f^-$ が存在するので

$$\begin{aligned} &\int_{E^+} f^+ - \int_{E^-} f^- = \int_{E^+} f^+ + \int_{E^-} -f^- = \\ &= \int_{E^+} (f^+ - f^-) + \int_{E^-} (f^+ - f^-) = \\ &= \int_{E^+ \cup E^-} (f^+ - f^-) = \int_E (f^+ - f^-) = \int_E f \end{aligned}$$

となり，f も E 上 K-H 可積分となる。□

残された問題: 予想 conjecture

定理 1 で E を可測集合, E^+ を非可測集合とする (E^- も非可測となる) 。このとき，

$$|f|\text{ は } E \text{ 上 } \mathrm{K-H} \text{ 可積分} \Longrightarrow f \text{ は } E \text{ 上 } \mathrm{K-H} \text{ 可積分}$$

とはならない？

(2) が成り立つ理由

無限級数を幅 1 の階段関数 step function with base width 1：$f(x)$ と考えれば

$$\begin{aligned}\sum a_n &= \int_A f(x)dx = \sum_{a_n \geq 0} |a_n| - \sum_{-a_n > 0} |a_n| = \\ &= \int_{f(x)\geq 0} |f(x)|dx - \int_{-f(x)>0} |f(x)|dx = \\ &= \int_{f(x)\geq 0} f^+(x)dx - \int_{-f(x)>0} f^-(x)dx =: \\ &= \int_{A^+} f^+(x)dx - \int_{A^-} f^-(x)dx = \int_A (f^+(x) - f^-(x))dx\end{aligned}$$

となるが，$f(x)$ は幅 1 の階段関数 step function であるから，集合

$$A^+ := \{x \in A\,;\ f(x) \geq 0\ \},\ A^- := \{x \in A\,;\ -f(x) > 0\ \}$$

は区間の集まり collection of intevals：可測集合 measurable sets であるから，定理 1 により，(2) が成り立つ。

(1) が成り立つ理由

Lebesgue 可積分関数は階段関数 step funnctions の極限 limit と考えられ，可測集合 measurable sets の極限 limit も可測集合であるから，**(2) が成り立つ理由**と同じ理由により (1) が成り立つ。

追記：2022 年 2 月 8 日火曜日
The following is added on Feburuary 8 of 2022

定義 2

集合 E の示性関数 $indicator function$：$\chi_E := \chi_E(\boldsymbol{x})$ を

$$\chi_E := \chi_E(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in E) \\ 0 & (\boldsymbol{x} \notin E) \end{cases}$$

で定義する。

定理 2　E を可測集合 *measurable set*, E^+ を非可測集合 *non-measurable set* とする (E^- も非可測 *non-measurable* となる)。このとき，

$$|f| \text{ は } E \text{ 上 K} - \text{H 可積分} \not\Longrightarrow f \text{ も } E \text{ 上 K} - \text{H 可積分}$$

となる。

証明 次の**反例**を示す。
反例
$\chi := \chi(\boldsymbol{x})$ を次で定義する。

$$\chi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1 & (\boldsymbol{x} \in E^+) \\ -1 & (\boldsymbol{x} \notin E^-) \end{cases}$$

E は有界可測集合 *bounded measurable set* で $E = E^+ \cup E^-$,

$E^+ \cap E^- = \emptyset$,

E^+は非可測集合 $non - measurable\ set$(必然的に E^-も非可測集合)

$|\chi| = |\chi(\boldsymbol{x})| = 1$ であるから $|\chi|$ は E で K-H 可積分である。
ここで $\chi = \chi(\boldsymbol{x})$ も E で K-H 可積分と仮定して背理法 contradiction を使う。
χ, $|\chi|$ ともに E で K-H 可積分であるから，χ は E 上 L-可積分となる。従って $\chi^+ := \chi^+(\boldsymbol{x}) := \max\{\chi(\boldsymbol{x}), 0\}$，$\chi^- := \chi^-(\boldsymbol{x}) := \max\{-\chi(\boldsymbol{x}), 0\}$ も E 上 L-可積分 (K-H 可積分) であるから，$\chi_{E^+} = \chi^+$ も E 上 L-可積分 (K-H 可積分) となるが，これは E^+ が非可測集合 non-measurable set であることと矛盾する contradict。([3]p.77, **定義 2.6**,　[2]p.311)
これで**残された問題: 予想 conjecture** は解決した resolved。□

[3]p.77, **定義 2.6**,　[2]p.311:
I を可測集合 measurable set とするとき,

$$I \supset E \text{ は } (Lebesgue)\ measurable \Longleftrightarrow \chi_E \text{は } I \text{ 上 } K - H \text{ 可積分}.$$

参考文献

[1] R.G. Bartle: *A Modern Theory of Integration,* American Mathematical Society, Providence, 2001.

[2] R.G. Bartle, D.R.Sherbert: *Introduction to Real Analysis,* 3rd ed., John Wiley & Sons, 2000.

[3] A. Fonda: *The Kurzweil-Henstock Integral for Undergraduates,* Birkhäuser, 2018.
(邦訳：中嶋眞澄 Nakajima,M. 訳『クルツワイル－ヘンストック積分入門』丸善出版，2022, (ix+255)pp..)

[4] 藤原松三郎:『微分積分学　第 1 巻』内田老鶴圃，訂正第 7 版，1957(初版，1934)，(vi+672)pp..

[5] R.G. Bartle: *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* Wiley Classics Library, 1995 (originally published by John Wiley & Sons, 1966).

(received 26 January 2022.)