Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式 の 別証明 Another Proof of Cauchy-Schwarz-Bunyakowsik's Inequality

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We give here another simple proof of Cauchy-Schwarz-Bunyakowsik's Inequality which is new as far as the author knows.

Key words ; Cauchy-Schwarz-Bunyakowsik's Inequality.

Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論の定理を証明する動機となったものは，今年度著者の講義「経済数学 I」がオンライン講義となり講義ノート lecture note を作成中に思い付いたものである。その後，文献を調べたが，このようなものは著者が見た範囲でなかったので，簡単なものではあるが, ここに提示するものである。

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

とし，$\mathbf{C}$ の内積 $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\sigma$ を

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\sigma := \sigma_1 \overline{x_1} y_1 + \sigma_2 \overline{x_2} y_2 + \cdots + \sigma_n \overline{x_n} y_n \ \ with\ \sigma_1,\ \sigma_2,\ ,\cdots, \sigma_n > 0$$

で定義する。
Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式の証明は色々あるようであるが，ベクトルの成分が複素数である場合，この不等式の等号成立の必要十分条件を証明するのは，どれもそれ程容易ではないが，本小論の証明では明らかである。

定理 (Cauchy-Schwarz-Bunyakowski の不等式)

$$|\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle_\sigma| \leq \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle_\sigma \langle \boldsymbol{y}, \boldsymbol{y} \rangle_\sigma,$$

上記等号成立 $\Longleftrightarrow$ $\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ となる$\alpha \in \mathbf{C}$ が存在する。

証明

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j |x_i y_j - x_j y_i|^2 = \sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j (x_i y_j - x_j y_i) \overline{(x_i y_j - x_j y_i)} = \\ &= \sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j \{ |x_i|^2 |y_j|^2 + |x_j|^2 |y_i|^2 - (x_i \overline{x_j} \overline{y_i} y_j + \overline{x_i} x_j y_i \overline{y_j}) \} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j (x_i \overline{x_j} \overline{y_i} y_j + \overline{x_i} x_j y_i \overline{y_j}) \leq \sum_{i<j} \sigma_i \sigma_j (|x_i|^2 |y_j|^2 + |x_j|^2 |y_i|^2)$$

両辺に $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 |x_i|^2 |y_i|^2$ を加えて，

$\Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2|x_i|^2|y_i|^2+\sum_{i<j}\sigma_i\sigma_j(x_i\overline{x_j}\overline{y_i}y_j+\overline{x_i}x_jy_i\overline{y_j})$$
$$\leq\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2|x_i|^2|y_i|^2+\sum_{i<j}\sigma_i\sigma_j(|x_i|^2|y_j|^2+|x_j|^2|y_i|^2)$$
$$\text{上記左辺}=\left(\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\overline{x_i}y_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\sigma_jx_j\overline{y_j}\right)=|\sum_{i=1}^{n}\sigma_i\overline{x_i}y_i|^2=|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_\sigma|^2,$$
$$\text{上記右辺}=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i|x_i|^2\sum_{j=1}^{n}\sigma_j|y_j|^2=\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle_\sigma\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle_\sigma$$

であるので,

$\Longrightarrow$

$$|\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\rangle_\sigma|\leq\langle\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}\rangle_\sigma\langle\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\rangle_\sigma$$

を得る。

この証明の冒頭により，等号成立は明らかに

$$x_iy_j-x_jy_i=0\ \ for\ all\ i,j=1,2,\cdots,n\ \cdots(*)$$

が成り立つ事である。

$$(*)\iff x_1y_2-x_2y_1=0,x_1y_3-x_3y_1=0,\ \cdots,x_1y_n-x_ny_1=0$$

$$\iff\left\{\begin{array}{l}y_1=\alpha x_1\\y_2=\alpha x_2\end{array}\right.,\left\{\begin{array}{l}y_1=\alpha x_1\\y_3=\alpha x_3\end{array}\right.,\cdots,\left\{\begin{array}{l}y_1=\alpha x_1\\y_n=\alpha x_n\end{array}\right.\quad with\ some\ \alpha\in\mathbf{C}$$

$$\iff\boldsymbol{y}=\alpha\boldsymbol{x}\ \ with\ some\ \alpha\in\mathbf{C}.$$

従って，定理は証明された。□

参考文献

[1] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,* (in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..

(received 30 October 2021.)