Hamilton-Cayleyの定理の簡単な証明
A Simple Proof of The Hamilton-Cayley Theorem

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We give here another simple proof of the Hamilton-Cayley theorem in Linear Algebra which are new as far as the author knows.
Key words ; linear algebra, the Hamilton-Cayley theorem.

Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論の定理を証明する動機となったものは，今年度著者の講義「数理経済学」がオンライン講義となり講義ノートlecture noteを作成中に思い付いたものである。その後，文献を調べたが，このようなものは著者が見た範囲でなかったので，簡単なものではあるが講義の参考にもなるのではと考え紹介するものである。

著者の昨年の講義ノートに依ればHamilton-Cayleyの定理と一般に流布している証明は次のようなものである。

定理 4.3.1(Cayley-Hamilton ケーリー・ハミルトンの定理)
A の固有多項式を $\Phi(\lambda) := \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ とすると，
$\Phi(A) = \mathrm{O}$ である。但し，$A^0 = \mathrm{I}$ とする。
証明　$A - \lambda\mathrm{I}$ の余因子行列を $B(\lambda) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \lambda^k$ とする。但し，B_k は λ を含まない行列である。

$$B(\lambda)(A - \lambda\mathrm{I}) = |A - \lambda\mathrm{I}|\mathrm{I} = \varphi(\lambda)\mathrm{I}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k \lambda^k\right)(A - \lambda\mathrm{I}) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k\right)\mathrm{I} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{I} \lambda^k$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$B_0 A + \sum_{k=1}^{n-1}(B_k A - B_{k-1})\lambda^k - B_{n-1}\lambda^n = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{I} \lambda^k$$

これら係数を比較して，

$$\begin{array}{rcl} B_0 A & = & a_0 \mathrm{I}, \\ B_1 A - B_0 & = & a_1 \mathrm{I}, \\ B_2 A - B_1 & = & a_2 \mathrm{I}, \\ \cdots & & \cdots \\ B_{n-1} A - B_{n-2} & = & a_{n-1} \mathrm{I}, \\ -B_{n-1} & = & a_n \mathrm{I}. \end{array}$$

これらの右から，それぞれ $1, A, A^2, \cdots, A^{n-1}, A^n$ を掛けて，

$$\begin{array}{rcl} B_0 A & = & a_0 \mathrm{I}, \\ B_1 A^2 - B_0 A & = & a_1 A, \\ B_2 A^3 - B_1 A^2 & = & a_2 A^2, \\ \cdots & & \cdots \\ B_{n-1} A^n - B_{n-2} A^{n-1} & = & a_{n-1} A^{n-1}, \\ -B_{n-1} A^n & = & a_n A^n. \end{array}$$

辺々加えると，

$$\mathrm{O} = \sum_{k=0}^{n} a_k A^k = \Phi(A).$$

$\square$.

簡単な証明 A Simple Proof

$M(n\times n;\mathbf{C})$ を，複素数を成分とする n 次正方行列全体の集合とする。$M(n\times n;\mathbf{C})\ni A$ の固有多項式を $\Phi_A(z)$，A の固有値 eigenvalue を $\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ とする。Frobenius の定理より，$\Phi_A(z+\epsilon)$ に $z=A$, $\epsilon=\epsilon I$ と代入 substitute したもの：$\Phi_A(A+\epsilon I)$ の固有値 eigenvalue は，Frobenius の定理より，固有値 eigenvalue：$\Phi_A(\lambda+\epsilon)$，$(\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ を持ち，これらの形の固有値 $\Phi_A(\lambda+\epsilon)$，$(\lambda=\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ が $\Phi_A(A+\epsilon I)$ の固有値 eigenvalue の固有値全て all eigenvalues of $\Phi_A(A+\epsilon I)$ である (by the strong form of Frobenius' theorem)。$\Phi_A(z)$ の解析性 analycity より，ϵ を変化させる varying the value of ϵ ことにより，$\Phi_A(A+\epsilon I)$ の固有値 eigenvalue の固有値全て (all eigenvalues of $\Phi_A(A+\epsilon I)$) $\Phi_A(\lambda_1+\epsilon),\Phi_A(\lambda_2+\epsilon),\cdots,\Phi_A(\lambda_n+\epsilon)$ を相異なるよう making all eigenvalues different each other に出来る。
ここで $\epsilon\to 0$ とすると，$\Phi_A(\lambda_1+\epsilon),\Phi_A(\lambda_2+\epsilon),\cdots,\Phi_A(\lambda_n+\epsilon)\to 0$ は 0 を n 重根となり縮退する。従って $\lim_{\epsilon\to 0}\Phi_A(A+\epsilon I)=\Phi_A(A)$ の全ての固有値 all eigenvalues of $\Phi_A(A)$ は 0 である。全ての固有値が 0 となる行列は，ゼロ行列 O と冪零行列 nilpotent matrix のみで，冪零行列 nilpotent matrix の固有多項式は z^n であるから，$\Phi_A(z)\neq z^n$ であれば，$\Phi_A(A)$ は zero 行列，即ち $\Phi_A(A)=O$ となるしかない。$\square$.

参考文献

[1] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,*(in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..

(received 30 October 2021.)

前論文の訂正 Correction of the previous paper of the author

中嶋眞澄 Nakajima,M.: 線型代数に於ける或る定理 Theorems in Linear Algebra, (in Japanese), 鹿児島経済論集，第 61 巻 (2021 年)，第 4 号, 273-281. *Kagoshima Journal of Economics,* **61**(2021), 273-281.
p.280, ↓ l.2 in (*****), α's → a's.
p.280, ↑ l.4 , $\boldsymbol{b_n}$ → $\boldsymbol{b_m}$.
p.280, ↑ l.7 , $\boldsymbol{b_n}^T$ → $\boldsymbol{b_m}^T$.