非正規行列，冪零行列の数域半径
Numerical Radii of Non-normal and Nilpotent Matrices

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract
We give here upper estimates of the numerical radii for non-normal and nilpotent matrices.

Key words ; linear algebra.
Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論は，著者の講義「経済数学 I」のオンライン講義で使用した講義ノートを作成中見付けたものである。

$M_n := M(n \times n; \mathbf{C})$ を成分を複素数とする n 次正方行列全体の集合とし，$\mathbf{C}^n$ を成分を複素数とする n 次元ベクトル全体の集合とする。

$$A := (a_{ij}) := \\ := \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1j}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2j}, \cdots, a_{2n} \\ a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3j}, \cdots, a_{3n} \\ \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots \\ a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in} \\ \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nj}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbf{C}) = M_n$$

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n = M(n \times 1; \mathbf{C})$$

また，$A \in M_n = M(n \times n; \mathbf{C})$，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ の hermite 共役，転置行列を，それぞれ A^*，$\boldsymbol{x}^*$，A^T，$\boldsymbol{x}^T$ とする。
$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ の内積 inner product $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} := \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \cdots + \overline{x_n} y_n \in \mathbf{C}$$

で，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム norm：$\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

で定義する。
$A \in M_n$ が $A^*A = AA^*$ を満たすとき，A を正規 normal と云う。
また，$A^{m-1} \neq O, A^m = O$，$m \in \mathbf{N}$ を満たすとき，A を冪零 nilpotent，この m を A の冪零指数 nilpotent order of A と云う。
$A \in M(n \times n; \mathbf{C})$ の固有値 eigenvalue を $\lambda_1(A), \lambda_2(A), \cdots, \lambda_n(A)$ とするとき，A のスペクトル半径 spectral radius：$r(A)$ を

$$r(A) := \max\{ \ |\lambda_1(A)|, |\lambda_2(A)|, \cdots, |\lambda_n(A)| \ \}$$

で，A の作用素ノルム operator norm：$\|A\|$ を

$$\|A\| := \max_{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} := \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|$$

で定義する。

A^*A のゼロ zero でない固有値を $\sigma_1(A)^2 \geq \sigma_2(A)^2 \geq \cdots \geq \sigma_r(A)^2 > 0$ $(r := \mathrm{rank}A,\ \sigma_1(A) \geq \sigma_2(A) \geq \cdots \geq \sigma_r(A) > 0)$ とするとき，

$\sigma_1(A), \sigma_2(A), \cdots, \sigma_r(A)$ を A の特異値 singular value と云い

$$\|A\| = \sigma_1(A)$$

である。A の数域半径 numerical radius：$w(A)$ を

$$w(A) := \max_{\|\boldsymbol{x}\|\neq 0} \frac{|\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x}\rangle|}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

で定義する。これらスペクトル半径 spectral radius：$r(A)$，作用素ノルム operator norm：$\|A\|$，数域半径 numerical radius：$w(A)$ の間には次の関係が知られているが，数域半径 numerical radius：$w(A)$ については，殆ど何も知られていないと言って良く，未知なるものである：

$$\begin{aligned} \textit{unitary matrix}:\ U \in M_n \textit{ with } w(U^*AU) = w(A) \quad &\cdots (0),\\ (\textit{weakly unitary invariant})\ &\\ r(A) \leq w(A) \leq \|A\| \quad &\cdots (1),\\ \frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\| \quad &\cdots (2),\\ w(A^n) \leq w(A)^n,\ (n \in \mathbf{N}) \quad &\cdots (3). \end{aligned}$$

また，作用素ノルム operator norm：$\|A\|$，数域半径 numerical radius：$w(A)$ はノルム norm であるが，スペクトル半径 spectral radius：$r(A)$ はノルムではない not norm。数域半径 numerical radius：$w(A)$ に関しては，

$$w(AB) \leq w(A)w(B) \text{ は成り立たず，} w(AB) \leq 4w(A)w(B) \text{ が成り立つ。}$$

A が正規 normal である場合には，上記最初の不等式で等号が成り立つ：

$$r(A) = w(A) = \|A\| \quad \cdots (4).$$

A が非正規 non-normal である場合，$w(A)$ については殆ど何も知られていない。

§1. 冪零行列 nilpotent matrix $J_n^{(j)}$ $(j = 2, 3, \cdots, n)$

$$J_n^{(j)} :=$$

$$:= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, \cdots & \cdots & \cdots & ,j, & \cdots & \cdots & \cdots & ,n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n-j+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}$$

$$\in M_n = M(n \times n; \mathbf{R}),$$

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n = M(n \times 1; \mathbf{C}) \text{ に対して, } |\boldsymbol{x}| := \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \\ \vdots \\ |x_k| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

とおく。
簡単な計算から

$$J_n^{(j)} = (J_n^{(2)})^{j-2+1} \equiv$$

$$\begin{array}{c} \quad 1, \quad 2, \cdots\cdots\cdots \quad , j, \ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad , n \\ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}^{j-2+1} \end{array} \qquad \cdots (5)$$

$$(J_n^{(j)})^{n-j+1} \neq O,\ (J_n^{(j)})^{n-j+2} = O\ (j = 2, 3, \cdots, n)\ \cdots (6)$$

を得る。つまり，$J_n^{(j)}$ $(j = 2, 3, \cdots, n)$ は冪零行列 nilpotent matrix である。
(3),(5) より，

$$w(J_n^{(j)}) = w((J_n^{(2)})^{j-2+1}) \leq w(J_n^{(2)})^{j-2+1}\ \cdots (7)$$

である。

$$|\boldsymbol{x}^* J_n^{(2)} \boldsymbol{x}| \leq |\boldsymbol{x}|^T J_n^{(2)} |\boldsymbol{x}|$$

となるが，$|\boldsymbol{x}| \in \mathbf{R}^n$，$J_n^{(2)} \in M(n \times n; \mathbf{R})$ であり，2 次形式 $|\boldsymbol{x}|^T J_n^{(2)} |\boldsymbol{x}|$ は実 real であるので，

$$||\boldsymbol{x}|^T J_n^{(2)} |\boldsymbol{x}|| = |\boldsymbol{x}|^T \frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2} |\boldsymbol{x}|$$

と対称化 symmetrizable 出来る。$\frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2}$ は正規 normal であり，Rayleigh-Ritz 商 ratio に関する定理より，

$$w(J_n^{(2)}) \leq \max_{|||\boldsymbol{x}|||=1} ||\boldsymbol{x}|^T J_n^{(2)} |\boldsymbol{x}|| = \max_{|||\boldsymbol{x}|||=1} |\boldsymbol{x}|^T \frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2} |\boldsymbol{x}| = r\left(\frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2}\right) \cdots (8)$$

となる。そこで

$$\frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2}$$

の固有値を求めるが,

$$J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T$$

の固有値を求める。その為に $J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T$ の固有方程式を求め，これを解く：Gershgorin の定理より，$J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T$ の固有値 2λ は $|\lambda| \leq 1$ である。

$$\Delta_n := |2\lambda I - (J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T)| =$$

$$1,\quad 2,\quad 3,\ \cdots\cdots\cdots\ ,j,\ \cdots\cdots\cdots\ ,\ n$$

$$= \begin{vmatrix} 2\lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2\lambda & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2\lambda & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & -1 & \ddots & -1 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & -1 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2\lambda & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 & 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= 2\lambda\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2} \quad (\text{第１列で展開した。})\cdots(9)$$

一般に $\Delta_k = 2\lambda\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2}$ $(k = n, n-1, \cdots, 3)$ が成り立つが，$\lambda \in \mathbf{R}$ とは限らないが,

$$\lambda \in \mathbf{R}\ \text{と仮定する}\cdots(*)$$

と $|\lambda| \leq 1$ より $\lambda = \cos\vartheta$ と書ける。従って $2\lambda = e^{+i\vartheta} + e^{-i\vartheta}$ であるので

$$\begin{aligned} \Delta_k = 2\lambda\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} \quad &\Leftrightarrow \quad \Delta_k = (e^{+i\vartheta} + e^{-\vartheta})\Delta_{k-1} - \Delta_{k-2} \\ &\Leftrightarrow \quad \Delta_k - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{k-1} = e^{\mp i\vartheta}(\Delta_{k-1} - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{k-2}) \\ &\qquad\ (\text{複合同順}) \end{aligned}$$

となる。この関係を (9) に適用すると

$$\begin{aligned} \Delta_n - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{n-1} &= e^{\mp i\vartheta}(\Delta_{n-1} - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{n-2}) \\ &= e^{\mp 2i\vartheta}(\Delta_{n-2} - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{n-3}) \\ &= e^{\mp 3i\vartheta}(\Delta_{n-3} - e^{\pm i\vartheta}\Delta_{n-4}) \\ &\cdots \\ &= e^{\mp(n-2)i\vartheta}(\Delta_2 - e^{\pm i\vartheta}\Delta_1) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= e^{\mp(n-2)i\vartheta}\{(e^{+i\vartheta}+e^{-i\vartheta})^2-1-e^{\pm i\vartheta}(e^{+i\vartheta}+e^{-i\vartheta})\}\\
&= e^{\mp(n-2)i\vartheta}\{e^{+2i\vartheta}+e^{-2i\vartheta}+2-1-1-e^{\pm 2i\vartheta}\}\\
&= e^{\mp(n-2)i\vartheta}e^{\mp 2i\vartheta}\\
&= e^{\mp ni\vartheta}
\end{aligned}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{cases}
\Delta_n - e^{+i\vartheta}\Delta_{n-1} = e^{-ni\vartheta}\\
\Delta_n - e^{-i\vartheta}\Delta_{n-1} = e^{+ni\vartheta}
\end{cases}
$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$
\begin{cases}
e^{-i\vartheta}\Delta_n - \Delta_{n-1} = e^{-(n+1)i\vartheta}\\
e^{+i\vartheta}\Delta_n - \Delta_{n-1} = e^{+(n+1)i\vartheta}
\end{cases}
$$

これより Δ_{n-1} を消去すると $(\sin\vartheta \neq 0)$

$$\Delta_n = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$$

となり[1]，$J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T$ の固有方程式は

$$|2\lambda I - (J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T)| = \Delta_n = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta} = 0$$

である。この方程式は実際に n 個の解：

$$\lambda = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

を持っているので

$$\frac{J_n^{(2)} + (J_n^{(2)})^T}{2} \text{の固有値}：\lambda$$

は

$$\lambda = \cos\frac{k\pi}{n+1} \quad (k = 1, 2, \cdots, n) \cdots (10)^2$$

[1]これは，第 2 種の Chevishov 多項式

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta},\quad x = \cos\vartheta,\quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

である。これは漸化式

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x),\quad n = 2, 3, 4, 5, \cdots$$

を満たす。

[2]仏国の大数学者 Lagrange,Joseph-Louis(1736-1813) が 1759 年に音波の伝播に関して彼の未定乗数法を使って驚くべき事に既に計算しているとの事である。 [13] [4]

全てであり，

$$r\left(\frac{J_n^{(2)}+(J_n^{(2)})^T}{2}\right)=\cos\frac{\pi}{n+1}\cdots(11)$$

である。
(7),(8),(11) を使うと

$$\begin{aligned} w(J_n^{(j)}) &= w((J_n^{(2)})^{j-2+1}) \le w(J_n^{(2)})^{j-2+1} \\ &\le \left(r\left(\frac{J_n^{(2)}+(J_n^{(2)})^T}{2}\right)\right)^{j-2+1} \\ &\le \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1} \quad (j=2,3,\cdots,n)\ \cdots(12) \end{aligned}$$

一方，

$$(J_n^{(j)})^* J_n^{(j)} = \qquad 1,\quad 2,\cdots\cdots\cdots\ ,j,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ,n$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots(13)$$

であるから，$\|J_n^{(j)}\|=1\ \ (j=2,3,\cdots,n)$ である。$\cdots(14)$
また， [13] [14] [16] に依れば，
冪零指数 nilpotent order m の冪零行列 N の数域半径 numerical radius: $w(N)$ は

$$w(N)\le\|N\|\cos\frac{\pi}{m+1}\ \cdots(15)$$

である事と (6),(12),(14) を使うと次の定理を得る。

定理 1 Theorem1

$$w(J_n^{(j)})\le\min\left\{\|J_n^{(j)}\|\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1},\|J_n^{(j)}\|\cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\}$$

$$\mathit{with}\ \ \|J_n^{(j)}\|=1\ \ (j=2,3,\cdots,n).\ \cdots(16)$$

更に，$j \geq \frac{n}{2}+1$ の場合の結果 [17]：

$$n \geq 2(n-j+1)\ (n \in \mathbf{N},\ j=2,\cdots,n) \text{ と仮定して，}$$
$$(J_n^{(j)})^{n-j+2} = O, \quad w(J_n^{(j)}) = \frac{1}{2}\|J_n^{(j)}\|.$$

も合せ考えると次の定理を得る。

定理 2 Theorem2

$$j \geq \frac{n}{2}+1 \text{ ならば，} \quad w(J_n^{(j)}) = \frac{1}{2}\|J_n^{(j)}\| \ \ with \ \ \|J_n^{(j)}\| = 1 \ \ . \ \cdots (17)$$

§2. 上三角行列 upper triangle matrix

Schur の定理により，任意の行列 $B \in M_n$ は, あるユニタリー行列 unitary matrix：$U \in M_n$ により，上三角行列 upper triangle matrix とユニタリー相似 unitary equivalent となる：

$$U^*BU =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda_{n-2} & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =: C$$

ここに$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$は B の固有値である。

$U^*BU = C$ は次のように分解される：

$$C = C_1 + C' := C_1 + C_2 + \cdots + C_j + \cdots + C_n$$

C' は一般上三角冪零行列 as general upper triangle nilpotent matrix と考えられる。

$$C_j :=$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{c} 1,\quad 2,\cdots\cdots\cdots\quad ,j,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\quad ,n \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2,j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & b_{n-j,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-j+1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n-j+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array} \end{array}$$

$(j = 2, 3, \cdots, n)$

$$C_1 = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

(0) より

$$w(B) = w(U^*BU) = w(C) = w(C_1 + C') \leq w(C_1) + w(C')$$

であるが，C_1 は正規行列 normal matrix, 対角行列 diagonal matrix であるから，Rayleigh-Ritz 商 ratio に関する定理より，

$$w(C_1) = r(C_1) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\} =: \lambda_{\max}(C_1) = \lambda_{\max}(B) = r(B)$$

である。
C' に関しては，一般の上三角冪零行列 as general upper triangle nilpotent matrix として考える。

$$w(C') = w(C_2 + \cdots + C_j + \cdots + C_n) \leq w(C_2) + w(C_3) + \cdots + w(C_j) + \cdots + w(C_n)$$

より，$w(C_j)$ を考える。

$$\boldsymbol{x}^* C_j \boldsymbol{x} =$$

$$= (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \cdots, \overline{x_n}) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{1j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{2,j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & b_{n-j,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-j+1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= b_{1j}\overline{x_1}x_j + b_{2,j+1}\overline{x_2}x_{j+1} + b_{3,j+2}\overline{x_3}x_{j+2} + \cdots + b_{n-j,n-1}\overline{x_{n-j}}x_{n-1} + b_{n-j+1,n}\overline{x_{n-j+1}}x_n,$$

$$|\boldsymbol{x}^* C_j \boldsymbol{x}| =$$
$$\leq |b_{1j}||x_1||x_j| + |b_{2,j+1}||x_2||x_{j+1}| + \cdots + |b_{n-j,n-1}||x_{n-1}| + |b_{n-j+1,n}||x_{n-j+1}||x_n|$$
$$\leq \beta_j\{|x_1||x_j| + |x_2||x_{j+1}| + |x_3||x_{j+2}| + \cdots + |x_{n-j}||x_{n-1}| + |x_{n-j+1}||x_n|\}$$
($\beta_j := \max\{|b_{1j}|, |b_{2,j+1}|, |b_{3,j+2}|, \cdots, |b_{n-j,n-1}|, |b_{n-j+1,n}|\}$ と定義する。)
$$= \beta_j |\boldsymbol{x}|^* J_n^{(j)} |\boldsymbol{x}| \quad j = 2, 3, \cdots, n.$$

となるので，$J_n^{(j)}$ に関する先の結果 (定理 1,2) より，

$$w(C_j) \leq \beta_j \max_{\||\boldsymbol{x}|\|=1} |\boldsymbol{x}|^* J_n^{(j)} |\boldsymbol{x}| = \beta_j w(J_n^{(j)}) =$$

$$= \begin{cases} \leq \beta_j \min\left\{\|J_n^{(j)}\| \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \|J_n^{(j)}\| \cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\} & \\ \qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\| = 1 \quad (j < \frac{n}{2}+1) & \\ = \frac{1}{2}\beta_j \|J_n^{(j)}\| & \\ \qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\| = 1 \quad (j \geq \frac{n}{2}+1) & \end{cases}$$

以上より，次の定理を得る：

定理 3 Theorem3

一般の上三角冪零行列 C' に対して for any general upper triangle nilpotent matrix C',

$$
\begin{aligned}
& w(C') \leq \\
& \leq \sum_{j<\frac{n}{2}+1} \beta_j \|J_n^{(j)}\| \min\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\} + \\
& \quad + \sum_{j\geq\frac{n}{2}+1} \frac{1}{2}\|J_n^{(j)}\|\beta_j \\
& = \sum_{j<\frac{n}{2}+1} \beta_j \min\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\} + \frac{1}{2}\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1} \beta_j
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& where\ \beta_j := \max\{|b_{1j}|, |b_{2,j+1}|, |b_{3,j+2}|, \cdots, |b_{n-j,n-1}|, |b_{n-j+1,n}|\} = \|C_j\|, \\
& (\ j = 2, 3, \cdots, n\ ) \\
& and\ C' = \\
& = \begin{pmatrix}
0 & b_{12} & b_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\
0 & 0 & b_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\
0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & b_{n-1,n} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

註 Remark 簡単な計算より $\|C_j\| = \beta_j$ である。また，$j \geq \frac{n}{2}+1$ ならば，$w(C_j) = \frac{1}{2}\|C_j\|$ である。

また，上記行列 $B = U^*BU = C = C_1 + C'$ に対しては次の定理 4 が成り立つ。

定理 4 Theorem4
一般の行列 B に対して For any general matrix $B = U^*BU = C = C_1 + C'$，C は上三角行列 upper triangle matrix，U はユニタリー行列 unitary matrix である。

$$
\begin{aligned}
& w(B) = w(U^*BU) = w(C_1 + C') \leq w(C_1) + w(C') \leq \\
& \leq \sum_{j<\frac{n}{2}+1} \beta_j \|J_n^{(j)}\| \min\left\{ \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1} \right\} + \\
& \quad + \sum_{j\geq\frac{n}{2}+1} \frac{1}{2}\|J_n^{(j)}\|\beta_j + r(B) \\
& = \sum_{j<\frac{n}{2}+1} \beta_j \min\left\{ \left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1} \right\} + \\
& + \frac{1}{2}\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1} \beta_j + r(B),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& where\ \beta_j := \max\{|b_{1j}|, |b_{2,j+1}|, |b_{3,j+2}|, \cdots, |b_{n-j,n-1}|, |b_{n-j+1,n}|\}, \\
& (\ j = 2, 3, \cdots, n\ ) \\
& and\ C = U^*BU =
\end{aligned}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
\lambda_1 & b_{12} & b_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1n} \\
0 & \lambda_2 & b_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{2n} \\
0 & 0 & \lambda_3 & \ddots & \cdots & \cdots & \cdots & b_{3n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \lambda_{n-2} & b_{n-2,n-1} & b_{n-2,n} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & b_{n-1,n} \\
0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \lambda_n
\end{pmatrix}
$$

§3. 非正規行列 non-normal matrix

一般の非正規行列 non-normal matrix

$$A =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n$$

と置く。

$w(A)$ の定義より，$w(A^*) = w(A)$ である事に注意する。§2. のように A を次のように分解する。

$$A = \sum_{j=2}^{n} A_{-j} + A_1 + \sum_{j=2}^{n} A_j$$

$$A_j :=$$

$$:= \begin{array}{cc} \begin{matrix} 1, \quad 2, \cdots\cdots\cdots \quad , j, \ \cdots\cdots\cdots\cdots \quad , n \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1j} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{2,j+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & a_{n-j,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_{n-j+1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n-j+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{matrix} \end{array}$$

$$where\ \alpha_j := \max\{|a_{1j}|, |a_{2,j+1}|, |a_{3,j+2}|, \cdots, |a_{n-j,n-1}|, |a_{n-j+1,n}|\},$$

$$(\ j = 2, 3, \cdots, n\ )$$

$$A_1 := \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$$

$$A_{-j} :=$$

$$:= \begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
a_{j1} & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & 0 \\
0 & a_{j+1,2} & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & 0 \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
0 & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-j+1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \\
1, \quad 2, \cdots\cdots\cdots \quad , n-j+1, \ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \quad n
\end{array}$$

where $\alpha_{-j} := \max\{|a_{j1}|, |a_{j+1,2}|, |a_{j+2,3}|, \cdots, |a_{n-1,n-j}|, |a_{n,n-j+1}|\}$,
$(\ j = 2, 3, \cdots, n \ )$,
$\alpha_1 := \max\{|a_{11}|, |a_{22}|, |a_{33}|, \cdots, |a_{nn}|\}$.

註 Remark $\|A_{\pm j}\| = \alpha_{\pm j} \ (\ j = 2, 3, \cdots, n \ )$, $\|A_1\| = \alpha_1$.
であるので，後述から $w(A_{\pm j}) < \|A_{\pm j}\|$ となる。

すると，

$$\begin{aligned}
w(A) &= w(\sum_{j=2}^{n} A_{-j} + A_1 + \sum_{j=2}^{n} A_j) \\
&\leq \sum_{j=2}^{n} w(A_{-j}) + w(A_1) + \sum_{j=2}^{n} w(A_j) \\
&= \sum_{j=2}^{n} w(A_{-j}^*) + w(A_1) + \sum_{j=2}^{n} w(A_j)
\end{aligned}$$

となり，A_1 は対角行列，A_{-j}^*，A_j $(j = 2, 3, \cdots, n)$ には §2. の結果が使える apply ので，

$$w(A_1) = \alpha_1,$$

$$w(A_j)=\begin{cases} \leq \alpha_j \min\left\{\|J_n^{(j)}\|\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \|J_n^{(j)}\|\cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\|=1 \quad (j<\frac{n}{2}+1) \\ =\frac{1}{2}\alpha_j\|J_n^{(j)}\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\|=1 \quad (j\geq\frac{n}{2}+1) \end{cases}$$

$$w(A_{-j})=\begin{cases} \leq \alpha_{-j} \min\left\{\|J_n^{(j)}\|\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1}, \|J_n^{(j)}\|\cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\|=1 \quad (j<\frac{n}{2}+1) \\ =\frac{1}{2}\alpha_{-j}\|J_n^{(j)}\| \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad with \ \ \|J_n^{(j)}\|=1 \quad (j\geq\frac{n}{2}+1) \end{cases}$$

を得，結局

定理 5 Theorem5

非正規行列 A に対して For any non-normal matrix A,

$$w(A)\leq$$

$$\leq \alpha_1+\sum_{j<\frac{n}{2}+1}(\alpha_j+\alpha_{-j})\|J_n^{(j)}\|\min\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1},\cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\}+$$

$$+\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1}\frac{1}{2}\|J_n^{(j)}\|(\alpha_j+\alpha_{-j})$$

$$=\alpha_1+\sum_{j<\frac{n}{2}+1}(\alpha_j+\alpha_{-j})\min\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n+1}\right)^{j-2+1},\cos\frac{\pi}{(n-j+2)+1}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1}(\alpha_j+\alpha_{-j})$$

$where \ \alpha_j:=\max\{|a_{1j}|,|a_{2,j+1}|,|a_{3,j+2}|,\cdots,|a_{n-j,n-1}|,|a_{n-j+1,n}|\},$

$\qquad \alpha_{-j}:=\max\{|a_{j1}|,|a_{j+1,2}|,|a_{j+2,3}|,\cdots,|a_{n-1,n-j}|,|a_{n,n-j+1}|\},$

$(\ j=2,3,\cdots,n\ ),$

$\alpha_1:=\max\{|a_{11}|,|a_{22}|,|a_{33}|,\cdots,|a_{nn}|\}.$

$$w(A)<\frac{1}{2}\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1}(\alpha_j+\alpha_{-j})+\sum_{2\leq j<\frac{n}{2}+1}(\alpha_j+\alpha_{-j})+\alpha_1$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j\geq\frac{n}{2}+1}(\|A_j\|+\|A_{-j}\|)+\sum_{2\leq j<\frac{n}{2}+1}(\|A_j\|+\|A_{-j}\|)+\|A_1\|,$$

$\|A\|\leq\|A_{-n}\|+\cdots+\|A_{-2}\|+\|A_1\|+\|A_2\|+\cdots+\|A_n\|,$

$and \ A=$

$$
= \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{3n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\
\vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & a_{n-1,n} \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn}
\end{pmatrix} \in M_n.
$$

が成り立つ。

Gershgorin の定理が行列の成分 matrix components により，その固有値 eigenvalues を上から評価 upper estimation するのと同様，これら**定理 3,4,5** は，行列の成分 matrix components により，その数域半径 numerical radius を上から評価 upper estimation している。しかし，$\|A\|$，$\|B\|$，$\|C'\|$ との関係は不明 unknown である。

参考文献

[1] Horn,R.J. and Johnson,C.A.: *Matrix Analysis,* Cambridge Univ. Press, 1985, (xiii+561)pp..

[2] 古田孝之 Furuta,T.『線型作用素への誘い』, *An Invitation to Linear Operators*, (in Japanese), 培風館，Baihoo-Kan, 2001，(iv+248)pp..

[3] 日合文雄 Hiai,H.，柳研二郎 Yanagi,K.『ヒルベルト空間と線型作用素』*Hilbert Spaces and Linear Operators,* (in Japanese), 牧野書店　Makino-Shoten, 1995, (vi+292)pp..

[4] Hiai,H. Petz,D.: *Introduction to Matrix Analysis and Applications*, Hindustan Book Agency, 2014, New Delhi, (viii+332)pp..

[5] Varga,R.S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962, Englewood Cliffs, New Jersey.
(邦訳：渋谷政昭 Shibuya,M.，棚町芳弘 Tanamachi,Y.，金子正久 Kaneko,M.，野田隆 Noda,T. 訳『計算機による大型行列の反復解法』サイエンス社，1972, (vii+290)pp..)

[6] Varga,R.S.: *Geršgorin and His Circle*, Springer, 2004, (x+226)pp..

[7] Lax,P.D.: *Linear Algebra and its Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2007, Hoboken New Jersey.
(邦訳：光道隆 Hikari,M.，湯浅久利 Yuasa,H. 訳『ラックス線形代数』丸善出版，2015, (x+430)pp..)

[8] 伊理正夫 Iri,M.『線形代数汎論』朝倉書店，2009, (viii+332)pp..

[9] 一松信 Hitotsumatsu,Sh.『線形数学』筑摩書房，1976, (vi+291)pp..

[10] 山本哲朗 Yamamoto,T.『数値解析入門』サイエンス社，2003(増訂版), (viii+273)pp..

[11] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析の基礎』サイエンス社，2010, (iv+211)pp..

[12] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析ノート』サイエンス社，2013, (iii+206)pp..

[13] Haagerup,U., de la Harpe,P.: The numerical radius of a nilpotent operator on a Hilbert space, *Proc.Amer.Math.Soc.* **115**(1992), no.2, 371-379.

[14] Karaev,M.T., Iskenderov,N.Sh.: Numerical range and numerical radius for some operators, *Linear Alg. and its Appli.*, **432**(2010), 3149-3158.

[15] Karaev,M.T.: New proofs of the Haagerup-de la Harpe inequality, Math.Notes 75(2004), 731-733; translated from Matematicheskie Zametki 75(2004), 787-788. **未見 not yet acquainted**

[16] Karaev,M.T.: The numerical range of a nilpotent operator on a Hilbert space, *Proc.Amer.Math.Soc.* **132**(2004), no.8, 2321-2326.

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$ なる例 Examples for which $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$ holds., (in Japanese), 鹿児島経済論集, 第62巻(2021年), 第2号, 37-43. *Kagoshima Journal of Economics,* **62**(2021), 37-43.

(received 5 September 2021.)