次元定理の簡単な証明
A Simple Proof of the Relationship among the Dimensions of Linear Sub-Spaces

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要
Abstract
We give here a simple proof of the relationship among the dimensions of linear sub-spaces.

Key words ; linear algebra.
Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論は，著者の講義「経済数学I」のオンライン講義で使用した講義ノートを作成中見付けたものである。証明後文献を調べた処，殆ど全ての教科書の証明は，ここで著者の昨年の講義ノートより例示するように基底を露わにした証明であった。その中で例外であったのは [21] と [26] である。どちらも商空間の概念，結果を使っており，少し高級であるが，ここで述べる簡単な証明とは本質的に同じではある。このように簡単な証明もあることを紹介することは上記教科書情況の中，大学数学教育で無価値では無かろう。

定理 3.14(次元定理)

$f_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^m$に対して，

(1)　$f_A(\mathbf{R}^n) \triangleleft \mathbf{R}^m$, $\dim f_A(\mathbf{R}^n) = \mathrm{rank}\ A$
　or $f_A(\mathbf{C}^n) \triangleleft \mathbf{C}^m$, $\dim f_A(\mathbf{C}^n) = \mathrm{rank}\ A$
(2)　$\ker f_A(\mathbf{R}^n) \triangleleft \mathbf{R}^n$, $\dim \ker f_A = n - \mathrm{rank}\ A$ (これを次元公式と云う)
　or $\ker f_A(\mathbf{C}^n) \triangleleft \mathbf{C}^n$, $\dim \ker f_A = n - \mathrm{rank}\ A$ (これを次元公式と云う).
$X \triangleleft Y$ は X が線型空間 Y の (線型) 部分空間であることを表わす。

証明　R の場合を証明する (C の場合も同様)。

$$\begin{aligned}
&f_A(\mathbf{R}^n) = \{\boldsymbol{y} | \boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\} = \\
&= \{x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\} = \\
&= < \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n} > \triangleleft \mathbf{R}^m.
\end{aligned}$$

定理3.4(訂正定理3.4 の rank $V \to$ dim V) より

$$\dim f_A(\mathbf{R}^n) = \dim < \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n} > = \mathrm{rank}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\} = \mathrm{rank}\ A$$

これで (1) は証明された。次に (2) を証明する。
定理 3.1 を使う。$\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2} \in \ker f_A \Leftrightarrow f_A(\boldsymbol{x_1}) = \mathbf{0}, f_A(\boldsymbol{x_2}) = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{x} \in \ker f_A \Leftrightarrow f_A(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ より

$$\begin{aligned}
&f_A(\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2}) = f_A(\boldsymbol{x_1}) + f_A(\boldsymbol{x_2}) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} \in \ker f_A \\
&f_A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f_A(\boldsymbol{x}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \alpha\boldsymbol{x} \in \ker f_A.
\end{aligned}$$

従って定理3.1 より $\ker f_A \triangleleft \mathbf{R}^n$.
次元公式の証明　$\dim \ker f_A =: s$ とする。$\ker f_A$ の基底を $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_s}$ とする。($\ker\ f_A \triangleleft \mathbf{R}^n$ なので，基底は存在する。) $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_s}$ に適当な $\boldsymbol{b_{s+1}}, \boldsymbol{b_{s+2}}, \cdots, \boldsymbol{b_n}$ を加えて
$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_s}, \boldsymbol{b_{s+1}}, \boldsymbol{b_{s+2}}, \cdots, \boldsymbol{b_n}$ が $\mathbf{R}^n$ の基底になるようにする事が出来る。$f_A(\mathbf{R}^n) \ni \boldsymbol{y}$(任意) は $\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) \cdots$①の形に書け，$\mathbf{R}^n \ni \boldsymbol{x}$ も $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{b_1} + \alpha_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{b_s} + \alpha_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \alpha_{s+2}\boldsymbol{b_{s+2}} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b_n} \cdots$②の形に書ける。②を①に代入して，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{y} = f_A(\boldsymbol{x}) &= f_A(\alpha_1\boldsymbol{b_1} + \alpha_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + \alpha_s\boldsymbol{b_s} + \alpha_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{b_n}) = \\
&= \alpha_1 f_A(\boldsymbol{b_1}) + \alpha_2 f_A(\boldsymbol{b_2}) + \cdots + \alpha_s f_A(\boldsymbol{b_s}) + \alpha_{s+1} f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}) + \cdots + \alpha_n f_A(\boldsymbol{b_n}) = \\
&= \alpha_1\mathbf{0} + \alpha_2\mathbf{0} + \cdots + \alpha_s\mathbf{0} + \alpha_{s+1} f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}) + \cdots + \alpha_n f_A(\boldsymbol{b_n}) = \\
&= \alpha_{s+1} f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}) + \cdots + \alpha_n f_A(\boldsymbol{b_n}) \in < f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n}) > .
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{y}$ は任意であったから，$f_A(\mathbf{R}^n) =< f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n}) >$.
故に $\dim f_A(\mathbf{R}^n) = \dim < f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n}) >$.
今証明したばかりの定理 3.13(1):$\dim f_A(\mathbf{R}^n) = \mathrm{rank}\ A$ より，
$\mathrm{rank}\ A = \dim < f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n}) >= \mathrm{rank}\{f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})\}$.
ここで $f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})$ が 1 次独立である事を仮定すれば，
$\mathrm{rank}\{f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})\} = n - s$ となり，最終的に
$\mathrm{rank}\ A = \mathrm{rank}\{f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})\} = n - s = n - \dim \ker f_A$
となり定理の証明は完了する。

$f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})$ が 1 次独立である事の証明

$$x_{s+1}f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}) + \cdots + x_n f_A(\boldsymbol{b_n}) = \mathbf{0} \ \cdots ③$$

が自明な解 $x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$ のみを持つ事を示せば良い。

$$③: \mathbf{0} = x_{s+1}f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}) + \cdots + x_n f_A(\boldsymbol{b_n}) = f_A(x_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n})$$

故に，$x_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} \in \ker f_A =< \boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_s} >$
従って，$x_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} = (-x_1)\boldsymbol{b_1} + (-x_2)\boldsymbol{b_2} + \cdots + (-x_s)\boldsymbol{b_s}$ の形に書ける。故に

$$x_1\boldsymbol{b_1} + x_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + x_s\boldsymbol{b_s} + x_{s+1}\boldsymbol{b_{s+1}} + \cdots + x_n\boldsymbol{b_n} = \mathbf{0}$$

$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_s}, \boldsymbol{b_{s+1}}, \cdots, \boldsymbol{b_n}$ は基底で 1 次独立であったから，$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ で，特に

$$x_{s+1} = \cdots = x_n = 0$$

即ち，$f_A(\boldsymbol{b_{s+1}}), \cdots, f_A(\boldsymbol{b_n})$ が 1 次独立である事が証明され定理の証明は完成した。□
注 この定理により，f_A が全射即ち $f_A(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^m$ であれば $\dim f_A(\mathbf{R}^n) = \mathrm{rank}\ A = m$. 単射であれば $\dim \ker f_A = 0$ で，線型性より逆も成り立つ。全単射であれば，$n = m$.

このように比較的長い証明を殆ど全ての教科書が採用していて，著者達は簡単な証明を考えないのであろうか？

短い簡単な証明 Short and simple Proof.

$\mathbf{C}^n$ から $\mathbf{C}^m$ への線型写像を $A \in M(m \times n; \mathbf{C})$ とする。

$\ker A := \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \mid A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}\}$ として，

$\mathbf{C}^n = \ker A \oplus X$，($X$ は $\ker A$ の補空間とする.)$\cdots$①

と置く。

$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in X, A\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}'$ とすると，$A(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}') = \mathbf{0}$ より $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \in \ker A \cdots$②

X は部分空間であるので，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \in X \cdots$③

①，②，③より，$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' \in \ker A \cap X = \{\mathbf{0}\}$，従って，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}'$ となり，

$A : X \to AX := \{\, A\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \,\}$ は，1:1 写像 1:1mapping となるので，$\dim X = \dim AX \cdots$④

$A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n})$ を A の列ベクトル表現，

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n$$

とすると，

$$\begin{aligned} AX &= \{\, A\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^m \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n \,\} \\ &= \left\{ (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^m \;\middle|\; x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{C} \right\} \\ &= \{\, x_1\boldsymbol{a_1} + x_2\boldsymbol{a_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{a_n} \in \mathbf{C}^m \mid x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbf{C} \,\} \end{aligned}$$

より，$\dim AX = \mathrm{rank}\{\, \boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n} \,\} = \mathrm{rank}A \cdots$⑤

従って①，④，⑤より，$n = \dim \mathbf{C}^n = \dim\ker A + \mathrm{rank}A$ が得られ，証明は完了する。$\square$.

参考文献

[1] 古屋茂 Furuya,Sh.『行列と行列式(増補版)』培風館, 1959, (iv+198)pp., *Matrices and Determinants: revised ed.* (in Japanese), Baihoo-Kan, 1959, (iv+198)pp..
W

[2] Gantmacher,F.R. (translated from Russian and revised by Brenner,J.L., Bushaw,D.W. and Evanusa,S.): *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publ., 1959, (ix+317)pp..

[3] Horn,R.J. and Johnson,C.A.: *Matrix Analysis,* Cambridge Univ. Press, 1985, (xiii+561)pp..

[4] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,* (in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..
W

[5] 小山昭雄 Koyama,A.『線型代数と位相　下：経済数学教室 4』岩波書店, 1994, (ix+311)pp., *Linear Algebra and Topology, vol.2: Mathematics for Economics 4*, (in Japanese), Iwanami-Shoten, 1994, (ix+311)pp..
W(B)

[6] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 行列に関する Oldenburger の定理の初等的証明 An Elementary Proof of Oldenburger's Theorem on Matrix Theory, (in Japanese), 鹿児島経済論集, 第 52 巻 (2011 年), 第 1-4 合併号, 29-31. *Kagoshima Journal of Economics,* **52**(2011), 29-31. (This Journal.)

[7] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 線型代数に於ける或る定理 Theorems in Linear Algebra, (in Japanese), 鹿児島経済論集, 第 61 巻 (2021 年), 第 4 合併号, 273-281. *Kagoshima Journal of Economics,* **61**(2021), 273-281. (This Journal, this volume.)

[8] 二階堂副包 Nikaido,H.『経済のための線型数学』培風館, 1961, (iv+213)pp., *Linear Mathematics for Economics* (in Japanese), Baihoo-Kan, 1961, (iv+213)pp..

[9] 二階堂副包編集 Nikaido,H.ed., 斉藤謹造 Saitoh,K., 根岸隆 Negishi,T., 鈴村興太郎 Suzumura,K., 大槻幹郎 Ohtsuki,M., 堀元 Hori,H., 蝋山昌一 Rohyama.Sh.『経済の数理』筑摩書房，1977，(vi+273)pp..
Mathematical Economics (in Japanese), Chikuma-Shobou, 1977, (vi+273)pp..

[10] Serre,D.: Matrices, 2nd ed. Springer, 2009, (xiv+289)pp..
(著者は有名な数学者 Serre,J.P. の甥)
B

[11] 高山晟 Takayama,A.: Mathematical Economics, Dryden Press, 1974, (xxiii+744)pp..

[12] 津野義道 Tsuno,Y.『経済数学 II：線形代数と産業連関論』培風館，1990, (vi+262)pp..
Mathematics for Economics II: *Linear Algebra and Input-Output Analysis*, Baihoo-Kan, 1990, (vi+262)pp..
W

[13] 渡部睦夫 Watanabe,M.『線形代数』培風館，1984，(vi+181)pp..
B

[14] 室田一雄 Murota,K.，杉原正顕 Sugihara,M.『線形代数 II』丸善出版，2013, (xiii+262)pp..
W

[15] 高橋礼司 Takahashi,R.『線型代数 II』放送大学教育振興会，1996, (o+203)pp..

[16] 高橋礼司 Takahashi,R.『線型代数講義』日本評論社，2014, (viii+357)pp..

[17] 田中仁 Tanaka,H.『線形の理論』共立出版，2007, (v+214)pp..
K, (驚くべき事に著者は盲人である。)

[18] Varga,R.S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962, Englewood Cliffs, New Jersey.
(邦訳：渋谷政昭 Shibuya,M.，棚町芳弘 Tanamachi,Y.，金子正久 Kaneko,M.，野田隆 Noda,T. 訳『計算機による大型行列の反復解法』

サイエンス社，1972, (vii+290)pp..)
W

[19] Varga,R.S.: *Geršgorin and His Circle*, Springer, 2004, (x+226)pp..
W

[20] Bellman,R.: *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd ed., Rand Corpo. 1970, (xxiii+403)pp..
Boh

[21] Lax,P.D.: *Linear Algebra and its Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2007, Hoboken New Jersey.
(邦訳：光道隆 Hikari,M.，湯浅久利 Yuasa,H. 訳『ラックス線形代数』丸善出版，2015, (x+430)pp..)
Boh

[22] 斎藤正彦 Saito,M.『線型代数入門』東京大学出版会, 1966, (vii+279)pp..
K

[23] 斎藤正彦 Saito,M.『行列の解析学』東京図書，2017, (vi+208)pp..
K

[24] 伊理正夫 Iri,M., 藤重悟 Fujisige,S.『応用代数』コロナ社，1988, (ix+226)pp..
W

[25] 伊理正夫 Iri,M.『線形代数汎論』朝倉書店，2009, (viii+332)pp..
W

[26] 一松信 Hitotsumatsu,Sh.『線形数学』筑摩書房，1976, (vi+291)pp..
W

[27] 遠山啓 Toyama,H.『ベクトルと行列』日本評論社，1965, (v+186)pp..
B

[28] 南和彦 Minami,K.『線形代数講義』裳華房，2020, (viii+366)pp..
W

[29] Seneta,E.: *Non-Negative Matrices*, George Allen & Unwin Ltd., 1973, (x+214)pp..
W

[30] Berman,A., Plemmons.R.J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Science*, SIAM, 1994, (xx+340)pp..
W

[31] 児玉慎三 Kodama,Sh., 須田信英 Suda,N.『システム制御のためのマトリクス理論』コロナ社, 1981(改訂版), (v+437)pp..
W

[32] 仁木滉 Niki,A., 河野敏行 Kohno,T.『楽しい反復法』共立出版, 1998, (vii+130)pp..

[33] 山本哲朗 Yamamoto,T.『数値解析入門』サイエンス社, 2003(増訂版), (viii+273)pp..
B

[34] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析の基礎』サイエンス社, 2010, (iv+211)pp..
W

[35] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析ノート』サイエンス社, 2013, (iii+206)pp..

[36] 伊藤昇 Ito,N., 岩井齊良 Iwai,A., 岩堀長慶 Iwahori,N., 上林達治 Kanbayashi,T., 関野薫 Sekino,K., 高橋秀一 Takahashi,S.『経済系・工学系のための行列とその応用 (改訂版)』紀伊國屋書店, 1987, (viii+201)pp..
W

[37] 菊田健作 Kikuta,K.『線形数学』牧野書店, 1992, (vi+254)pp..
K

[38] 加藤敏夫 Kato,T.: *A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1982, New York.
(邦訳：丸山徹訳『行列の摂動』丸善出版, 1999, (xii+243)pp..)
R

[39] 鈴木雪夫 Suzuki,Y.『経済学のための数学入門 (上)』日本評論社, 1972, (iv+252)pp..
W

(received 31 August 2021.)