線型代数に於けるFrobeniusの定理の簡単な証明と一般化

A Simple Proof and Generalization of Frobenius' Theorem in Linear Algebra

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We give here another simple proof and a generalization of Frobenius' theorem in Linear Algebra which are new as far as the author knows.

Key words ; linear algebra, Frobenius' theorem.

Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論の定理を証明する動機となったものは，今年度著者の講義「経済数学I」がオンライン講義となり講義ノートlecture noteを作成中に思い付いたものである。その後，文献を調べたが，このようなものは著者が見た範囲でなかったので，簡単なものではあるが講義の参考にもなるのではと考え紹介するものである。

著者の昨年の講義ノートに依ればFrobenuiusの定理と一般に流布している証明は次のようなものである。
A^{-1} の固有値 λ^{-1} には言及していないものが多数である。

定理4.4.1(Frobenius フロベニウスの定理⋯弱い形)⋯著者の講義ノートより from the lecture note of the author.

$f(x)$ を任意の多項式とし，A の固有値を λ とすると $f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値である。更に $|A| \neq 0$ のとき，A^{-1} の固有値は λ^{-1} である。$(A \in M(n \times n; \mathbf{C}))$
証明 A の固有値を λ，この固有値の属す固有ベクトルを $\boldsymbol{p}$ とする。$n \in \mathbf{N}$ に対して，$A^n\boldsymbol{p} = A^{n-1}A\boldsymbol{p} = A^{n-1}\lambda\boldsymbol{p} = \lambda A^{n-1}\lambda\boldsymbol{p} = \cdots = \lambda^n\boldsymbol{p}$ となるので λ^n は A^n の固有値で，その固有ベクトルは $\boldsymbol{p}$ である。
また，α に対して，$\alpha\lambda$ も αA の固有値である $(\alpha A\boldsymbol{p} = \alpha\lambda\boldsymbol{p})$。更に $\boldsymbol{p}$ が A と B のそれぞれ固有値 λ, μ に属す固有ベクトルとしよう。$\lambda+\mu$，$\lambda\mu$ は，それぞれ $A+B$，AB の固有値であって，その固有ベクトルは共通の $\boldsymbol{p}$ である。何故ならば $(A+B)\boldsymbol{p} = A\boldsymbol{p} + B\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{p} + \mu\boldsymbol{p} = (\lambda+\mu)\boldsymbol{p}$，$AB\boldsymbol{p} = A(B\boldsymbol{p}) = A\mu\boldsymbol{p} = \mu A\boldsymbol{p} = \mu\lambda\boldsymbol{p} = (\lambda\mu)\boldsymbol{p}$. これらの事を順次使えば定理の前半の主張が得られる。後半については
$\boldsymbol{p} = (A^{-1}A)\boldsymbol{p} = A^{-1}(A\boldsymbol{p}) = A^{-1}\lambda\boldsymbol{p} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{p}$ より $\lambda^{-1}\boldsymbol{p} = \lambda A^{-1}\boldsymbol{p}$ であるから A^{-1} の固有値は λ^{-1}，その固有ベクトルは $\boldsymbol{p}$ である。□
注 強い形では $f(A)$ の固有値は $f(\lambda)$ の形に限られる事が云えるので，固有値の重複度も同じとなる。
証明 A と相似な三角行列を B とする。容易に $f(A)$ と $f(B)$ は相似である事が分かり，$f(B)$ も三角行列である。B の対角成分は A の固有値が並び $(b_{ii} = \lambda_i)$，$f(B)$ の対角成分は $f(b_{ii})$ である。$f(A)$ と $f(B)$ の固有方程式は一致し，$f(B)$ の固有方程式は $(x - f(b_{11}))(x - f(b_{22}))\cdots(x - f(b_{nn})) = (x - f(\lambda_1))(x - f(\lambda_2))\cdots(x - f(\lambda_n))$ であるから，$f(A)$ の固有値は全て $f(\lambda)$ である。□

Frobenius フロベニウスの定理の一般化 Generalization of Frobenius' Theorem
$f(z)$ を複素数 z の任意の複素解析関数とし，A の固有値を λ とする。$f(\lambda)$，$f(A)$ が well-defined ならば，$f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値である。
証明

$f(z) - f(\alpha)$ は $f(\alpha) - f(\alpha) = 0$ であるので，$f(z) - f(\alpha) = (z - \alpha)g(z, \alpha)$ と

因数分解できる。$g(z,\alpha)$ も z,αについて複素解析的である。

ここで $z=\lambda I, \alpha=A$ (I は単位行列) を代入したもの：

$$f(\lambda I)-f(A)=(\lambda I-A)g(\lambda I,A)$$

は定理の仮定から well−defined である。これらの det を取ると

$|f(\lambda I)-f(A)|=|f(\lambda)I-f(A)|=|(\lambda I-A)g(\lambda I,A)|=$

$=|\lambda I-A)||g(\lambda I,A)|=0\cdot|g(\lambda I,A)|=0,$

λは A の固有値であるから $|\lambda I-A)|=0,$

well−defined であるから $|g(\lambda I,A)|\neq\pm\infty.$

従って $|f(\lambda)I-f(A)|=0$ より，$f(\lambda)$ は $f(A)$ の固有値 eigenvalue である。□.

Frobenius フロベニウスの定理のもう 1 つの一般化 Another Generalization of Frobenius' Theorem

A の固有値を λ とする。このとき，A^* の固有値は $\overline{\lambda}$ である。但し，A^* は A の hermite 共役である。

証明 $(\lambda I-A)^*=\overline{\lambda}I-A^*\cdots$①

$|\lambda I-A^T|=|\lambda I-A|=0\cdots$②

より，②の複素共役を取ると

$|\overline{\lambda}I-\overline{A}^T|=\overline{|\lambda I-A|}=0\cdots$③

③の左辺の $\overline{A}^T=A^*$ であるので，$|\overline{\lambda}I-A^*|=0$

となり，証明は完了する。□.

参考文献

[1] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,* (in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..

(received 31 August 2021.)