中線定理の一般化
A Generalization of the Parallelogram Law

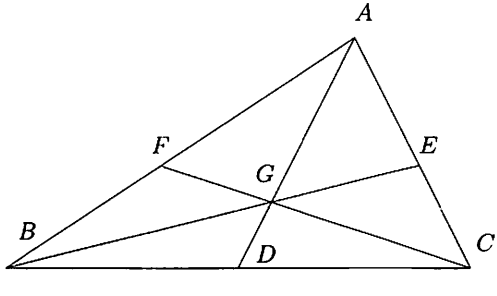
中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要
Abstract
We give here a generalization of the Parallelogram Law.

Key words ; linear algebra, vector, **sub-vector**, .

Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論は，著者の講義「経済数学Ｉ」のオンライン講義で使用した講義ノートを作成中見付けたものである。
ΔABC を考え，D, E, F はそれぞれ線分 $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ の中点である。G は勿論，重心である。



このとき次が成り立つが，これは中学校幾何で習うものであるが，数学の研究分野の中の作用素論でも使われる重要な定理である:

中線定理

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = 2(\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2),$$

が成り立つ。

$$\boldsymbol{x} := \overrightarrow{BD}, \quad \boldsymbol{y} := \overrightarrow{DA}$$

と置くと，

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2 = 2(|\boldsymbol{x}|^2 + |\boldsymbol{y}|^2)$$

と表わす事が出来る。

ある内積 inner product$\langle\cdot|\cdot\rangle$ を持つ複素線型空間 complex linear space を L として，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$ に作用する有界線型作用素 bounded linear operator (行列 matrix) を $T : L \ni \boldsymbol{x} \mapsto T\boldsymbol{x} \in L$ とすると，上記中線定理の次の一般化が成り立つ。
$|\boldsymbol{x}|^2 = \langle \boldsymbol{x}|\boldsymbol{x}\rangle$ である。

中線定理の一般化　A Generalization of the Parallelogram Law

$$\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle + \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle = 2(\langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle),$$

$T = I$ (I は恒等作用素 *identity*, 単位行列 *identity matrix*) のときが，元の中線定理である。

証明

証明は実に簡単で次のように定理の式の左辺を内積の性質を使って展開するだけである。

$$\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\rangle + \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|T(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\rangle = \\
&= \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|T\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|T\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle \\
&= \langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle + \\
&+\langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{x}\rangle - \langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{y}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle \\
&= 2(\langle \boldsymbol{x}|T\boldsymbol{x}\rangle + \langle \boldsymbol{y}|T\boldsymbol{y}\rangle).
\end{aligned}$$

□

参考文献

[1] 日合文雄 Hiai,H.，柳研二郎 Yanagi,K.『ヒルベルト空間と線型作用素』*Hilbert Spaces and Linear Operators,* (in Japanese), 牧野書店 Makino-Shoten, 1995, (vi+292)pp..

(received 31 August 2021.)