$w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$ なる例
Examples for which $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$ holds

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要
Abstract
We give here some examples for which $w(A) = \frac{1}{2}\|A\|$ holds.

Key words ; linear algebra.
Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論は，著者の講義「経済数学I」のオンライン講義で使用した講義ノートを作成中見付けたものである。

$M(n \times n; \mathbf{C})$ を成分を複素数とする n 次正方行列全体の集合とし，$\mathbf{C}^n$ を成分を複素数とする n 次元ベクトル全体の集合とする。

$$A := (a_{ij}) :=$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1j}, \cdots, a_{1n} \\ a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2j}, \cdots, a_{2n} \\ a_{31}, a_{32}, \cdots, a_{3j}, \cdots, a_{3n} \\ \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots \\ a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ij}, \cdots, a_{in} \\ \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots, \cdots \\ a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nj}, \cdots, a_{nn} \end{pmatrix} \in M(n \times n; \mathbf{C})$$

$$\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_k \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^n = M(n \times 1; \mathbf{C})$$

また，$A \in M(n \times n; \mathbf{C})$，$\boldsymbol{x} \in \mathbf{C}^n$ に対して，それぞれ A^*，$\boldsymbol{x}^*$ を，hermite 共役とする。

$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ の内積 inner product $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle$ を

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle := \boldsymbol{x}^* \boldsymbol{y} := \overline{x_1} y_1 + \overline{x_2} y_2 + \cdots + \overline{x_n} y_n \in \mathbf{C}$$

で，ベクトル $\boldsymbol{x}$ のノルム norm：$\|\boldsymbol{x}\|$ を

$$\|\boldsymbol{x}\| := \sqrt{\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle}$$

で定義する。

$A \in M(n \times n; \mathbf{C})$ の固有値 eigenvalue を $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ とするとき，A のスペクトル半径 spectral radius：$r(A)$ を

$$r(A) := \max\{\ |\lambda_1|, |\lambda_2|, \cdots, |\lambda_n|\ \}$$

で，A の作用素ノルム operator norm：$\|A\|$ を

$$\|A\| := \max_{\|\boldsymbol{x}\| \neq 0} \frac{\|A\boldsymbol{x}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} := \max_{\|\boldsymbol{x}\|=1} \|A\boldsymbol{x}\|$$

で定義する。

A^*A のゼロ zero でない固有値を $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \cdots \geq \sigma_r^2 > 0$ ($r := \mathrm{rank} A$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$) とするとき，

$$\|A\| = \sigma_1$$

である。A の数域半径 numerical radius：$w(A)$ を

$$w(A) := \max_{\|\boldsymbol{x}\| \neq 0} \frac{|\langle \boldsymbol{x}, A\boldsymbol{x} \rangle|}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

で定義する。これらスペクトル半径 spectral radius：$r(A)$, 作用素ノルム operator norm：$\|A\|$, 数域半径 numerical radius：$w(A)$ の間には次の関係が知られているが，数域半径 numerical radius：$w(A)$ については，殆ど何も知られていないと言って良く，未知なるものである：

$$r(A) \le w(A) \le \|A\|,$$
$$\frac{1}{2}\|A\| \le w(A) \le \|A\|.$$

A が正規 normal である場合には，上記最初の不等式で等号が成り立つ：

$$r(A) = w(A) = \|A\|.$$

A が非正規 non-normal である場合, $w(A)$ については殆ど何も知られていない。
上記第 2 の不等式については $A^2 = O$ のとき,

$$\frac{1}{2}\|A\| = w(A)$$

であることが知られているが，この小論では以下の無限個の例を示す：
$n \ge 2(n-j+1)$ と仮定して,

$$B := (b_{ij}) :=$$

$$:= \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} 1, & 2, & \cdots & \cdots & ,j, & \cdots & \cdots & \cdots & ,n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n-j+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array} \quad \in M(n \times n; \mathbf{R}),$$

$$|\boldsymbol{x}| := \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_2| \\ |x_3| \\ \vdots \\ |x_k| \\ \vdots \\ |x_n| \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$$

とおく。

$$|\boldsymbol{x}^* B \boldsymbol{x}| \le |\boldsymbol{x}|^T B |\boldsymbol{x}|$$

となるが，$|\boldsymbol{x}| \in \mathbf{R}^n$，$B \in M(n \times n; \mathbf{R})$ であり，２次形式 $|\boldsymbol{x}|^T B |\boldsymbol{x}|$ は実 real であるので，

$$||\boldsymbol{x}|^T B |\boldsymbol{x}|| = |\boldsymbol{x}|^T \frac{B + B^T}{2} |\boldsymbol{x}|$$

と対称化 symmetrizable 出来る。$\frac{B+B^T}{2}$ は正規 normal であり，Rayleigh-Ritz 商 ratio に関する定理より，

$$w(B) \le \max_{|||\boldsymbol{x}|||=1} ||\boldsymbol{x}|^T B |\boldsymbol{x}|| = \max_{|||\boldsymbol{x}|||=1} |\boldsymbol{x}|^T \frac{B + B^T}{2} |\boldsymbol{x}| = r\left(\frac{B + B^T}{2}\right)$$

となる。一方，$\frac{B+B^T}{2}$ に Gershgorin の定理 Theorem を適用 apply すると

$$r\left(\frac{B + B^T}{2}\right) \le \frac{1}{2}$$

である。従って

$$w(B) \le r\left(\frac{B + B^T}{2}\right) \le \frac{1}{2}.$$

また，

$$B^*B = \quad \begin{array}{l} 1,\quad 2,\cdots\cdots\cdots\ ,j,\ \cdots\cdots\cdots\cdots\ ,n \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ \vdots \\ n-j+1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ n \end{array}$$

であるから，$\|B\|=1$ である。従って

$$w(B) \leq r\left(\frac{B+B^T}{2}\right) \leq \frac{1}{2}.$$

と合せて考えると

$$w(B) \leq \frac{1}{2}\|B\|$$

となり，先の性質:

$$\frac{1}{2}\|A\| \leq w(A) \leq \|A\|$$

より，

$$\frac{1}{2}\|B\| \leq w(B)$$

であるので，従って

$$\frac{1}{2}\|B\| \leq w(B) \leq \frac{1}{2}\|B\|$$

となり，

$$w(B) = \frac{1}{2}\|B\|$$

を得る。
簡単な計算により

$$B^{n-j+2} = O$$

であるから，次の定理を得る：

定理 Theorem

$n \geq 2(n-j+1)$ $(n \in \mathbf{N},\ j = 2, \cdots, n)$ と仮定して，
$B^{n-j+2} = O$, $w(B) = \frac{1}{2}\|B\|$ を満たす $B \in M(n \times n; \mathbf{R})$ が無限個存在する。

参考文献

[1] Horn,R.J. and Johnson,C.A.: *Matrix Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1985, (xiii+561)pp..

[2] Serre,D.: Matrices, 2nd ed. Springer, 2009, (xiv+289)pp..
(著者は有名な数学者 Serre,J.P. の甥)
B

[3] 室田一雄 Murota,K.，杉原正顕 Sugihara,M.『線形代数 II』丸善出版，2013, (xiii+262)pp..
W

[4] 古田孝之 Furuta,T.『線型作用素への誘い』，*An Invitation to Linear Operators*, (in Japanese), 培風館，Baihoo-Kan, 2001，(iv+248)pp..

[5] 日合文雄 Hiai,H.，柳研二郎 Yanagi,K.『ヒルベルト空間と線型作用素』*Hilbert Spaces and Linear Operators*, (in Japanese), 牧野書店 Makino-Shoten, 1995, (vi+292)pp..

[6] Varga,R.S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962, Englewood Cliffs, New Jersey.
(邦訳：渋谷政昭 Shibuya,M.，棚町芳弘 Tanamachi,Y.，金子正久 Kaneko,M.，野田隆 Noda,T. 訳『計算機による大型行列の反復解法』サイエンス社，1972, (vii+290)pp..)
W

[7] Varga,R.S.: *Geršgorin and His Circle*, Springer, 2004, (x+226)pp..
W

[8] Lax,P.D.: *Linear Algebra and its Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2007, Hoboken New Jersey.
(邦訳：光道隆 Hikari,M.，湯浅久利 Yuasa,H. 訳『ラックス線形代数』丸善出版，2015, (x+430)pp..)
Boh

[9] 伊理正夫 Iri,M.『線形代数汎論』朝倉書店，2009, (viii+332)pp..
W

[10] 一松信 Hitotsumatsu,Sh.『線形数学』筑摩書房，1976, (vi+291)pp..
W

[11] 山本哲朗 Yamamoto,T.『数値解析入門』サイエンス社，2003(増訂版), (viii+273)pp..
B

[12] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析の基礎』サイエンス社，2010, (iv+211)pp..
W

[13] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析ノート』サイエンス社，2013, (iii+206)pp..

(received 31 August 2021.)