等差数列上のEuler関数
Euler's Totient Function $\varphi(n)$ on Arithmetical Progressions

中嶋眞澄

Masumi NAKAJIMA

Department of Economics

International University of Kagoshima

Kagoshima 891-0197, JAPAN

e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We generalize here Euler's totient function $\varphi(n)$ to arithmetical progressions which is new as far as the author knows.

Key words ; arithmetical functions.

Mathematics Subject Classification ; 11A25.

初項$a \in \mathbf{N}$，公差$d \in \mathbf{N}$，aとdは互いに素とする，即ち$(a, d) = 1$なる等差数列

$$\{a + kd \ : \ k \in \mathbf{N}\}$$

を考え，この数列の相連続する$t \in \mathbf{N}$項のうち，tと互いに素な項の個数を

$$\varphi_{a,d}(t) := \ ^{\sharp}\{a + kd \ : \ (a + kd, t) = 1, \ k_0 < k \leq k_0 + t, \ k_0, k, t \in \mathbf{N}\}$$

とする。この $\varphi_{a,d}(n)$ を等差数列 $\{a+kd \ : \ k \in \mathbf{N}\}$ 上の一般化された **Euler's totient function** $\varphi_{a,d}(n)$: **generalized Euler's totient function** $\varphi_{a,d}(n)$ **on the arithmetical progression** $\{a+kd \ : \ k \in \mathbf{N}\}$ と呼ぶ事とすると，次の定理が成り立つ。

定理

$$\varphi_{a,d}(t) = \frac{\varphi(td)}{\varphi(d)},$$

ここに $\varphi(n)$ は従来の *Euler totient function* である．

証明　以下の如く場合分けをして，t の相異なる素因数の個数に関する帰納法 induction で証明する。

Case 1. $t = p^n$ (p は素数 *prime*) の場合。

(1) $(p^n, d) = 1$ のとき，即ち $p \nmid d$ のとき，

$$\frac{\varphi(td)}{\varphi(d)} = \frac{\varphi(p^n d)}{\varphi(d)} = \frac{\varphi(p^n)\varphi(d)}{\varphi(d)} = \varphi(p^n) = p^{n-1}(p-1)$$

である。

(1-a) $p|a$ のとき（以下 a は相連続する t 個の項のうち最初の項を指す。）

$a+kd$ $(0 \le k \le p^n - 1)$ は，$k \equiv 0 \pmod p$ の場合を除いて p^n と素である。$k \equiv 0 \pmod p$ なる k は $k = p^n$ まで許せば，$k = 0, p, 2p, 3p, \cdots, p^n$ の $p^{n-1}+1$ 個存在する。しかし $k = p^n$ は除外すべきであるから，$k \equiv 0 \pmod p$ なる k は p^{n-1} 個存在する。従って p^n と素な $a+kd$ $(0 \le k \le p^n - 1)$ の個数は $p^n - p^{n-1} = p^{n-1}(p-1)$ で $\frac{\varphi(td)}{\varphi(d)}$ に等しい。

(1-b) $p \nmid a$ のとき。

$0 \le k_1, k_2 \le p^n - 1$，$k_1 \ne k_2$ のとき，$a + k_1 d \not\equiv a + k_2 d \pmod{p^n}$ である。何故なら $a + k_1 d \equiv a + k_2 d \pmod{p^n}$ とすると，$d(k_1 - k_2) \equiv 0 \pmod{p^n}$ で $p \nmid d$ であるから，$k_1 - k_2 \equiv 0 \pmod{p^n}$ となり，仮定に反する。故に $a+kd$ $(0 \le k \le p^n - 1)$ は，p^n について合同ならざる p^n 個の剰余類を作るが，その中で p^n と素なもの，即ち p^n についての既約剰余類は，$\varphi(p^n)$ 個で $\frac{\varphi(td)}{\varphi(d)}$ に等しい。

(2) $(p^n, d) = p^\alpha$ $(0 < \alpha \le n)$ のとき。

$d = p^\alpha d_0$，$(d_0, p) = 1$ と書ける。このとき，

$$\frac{\varphi(td)}{\varphi(d)} = \frac{\varphi(p^n p^\alpha d_0)}{\varphi(p^\alpha d_0)} = \frac{\varphi(p^{n+\alpha})}{\varphi(p^\alpha)} = p^n.$$

$(a,d)=1$ より $p \not| a$。故に $a+kd \equiv a \pmod{p}$ で $a+kd\ (0 \le k \le p^n-1)$ は全て p^n と素で，これは明らかに $p^n = \frac{\varphi(td)}{\varphi(d)}$ 個存在する。

Case 2. $t = AB$, $(A,B)=1$ の場合。

$t=A$, B のとき定理は成立すると仮定し (帰納法 induction)，$t=AB$ のときも成立する事を証明する。「$t=AB$ と素」は「$t=A$ と素，且つ，$t=B$ と素」と言い換えることが出来る事に注意する。問題の等差数列は

$$
\begin{aligned}
&a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots, a+(A-1)d,\\
&a+Ad, a+(A+1)d, a+(A+2)d, \cdots, a+(2A-1)d,\\
&a+2Ad, a+(2A+1)d, a+(2A+2)d, \cdots, a+(3A-1)d,\\
&a+3Ad, a+(3A+1)d, a+(3A+2)d, \cdots, a+(4A-1)d,\\
&\cdots, \qquad , \cdots, \qquad , \cdots,\\
&a+(B-2)Ad, a+\{(B-2)A+1\}d, \cdots, a+\{(B-1)A-1\}d,\\
&a+(B-1)Ad, a+\{(B-1)A+1\}d, \cdots, a+(BA-1)d
\end{aligned}
$$

であるが，ここで

$$a_1 := a,\ a_2 := a+Ad,\ a_3 := a+2Ad,\ \cdots,\ a_B := a+(B-1)d$$

と置くと，これらは

$$
\begin{aligned}
&a_1,\ a_1+d,\ a_1+2d,\ \cdots,\ a_1+(A-1)d,\\
&a_2,\ a_2+d,\ a_2+2d,\ \cdots,\ a_2+(A-1)d,\\
&a_3,\ a_3+d,\ a_3+2d,\ \cdots,\ a_3+(A-1)d,\\
&\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots\\
&a_B,\ a_B+d,\ a_B+2d,\ \cdots,\ a_B+(A-1)d.
\end{aligned}
$$

となり，しかも $(a_1,d)=(a_2,d)=\cdots=(a_B,d)=1$ であるから，$t=A$ の場合の定理を利用出来る (帰納法 induction の仮定)。即ち，
$a_i,\ a_i+d,\ a_i+2d,\ \cdots, a_i+(A-1)d\ (i=1,2,\cdots,B)$ の中で，A と素なるものは

$$\frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)} 個$$

ある。又，$(a_i+kd, A)=1\ (0 \le k \le A-1)$ ならば，$(a_i,d)=1$ より

$$(a_i+kd, Ad)=1 \Rightarrow (a_i+(k+A)d, Ad)=1 \Rightarrow (a_i+(k+A)d, A)=1$$

つまり，$(a_i + kd, A) = 1$ ならば $(a_{i+1} + kd, A) = 1$ である事を云っている。
$(a_i + kd, A) = 1$ なる $a_i + kd$ $(0 \le k \le A-1)$ は

$$\frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)}\text{個}$$

で $(a_{i+1} + kd, A) = 1$ なる $a_{i+1} + kd$ $(0 \le k \le A-1)$ についても同様であるから，$a_{i+1} + kd$ $(0 \le k \le A-1)$ の中で，A と素なものは $a_i + kd$ の中で A と素なものに Ad を加えたものに限る。
次に

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \cdots,\ a_1 + (A-1)d$$

の中で A と素なるものを

$$a_1 + k_1 d,\ a_1 + k_2 d,\ a_1 + k_3 d,\ \cdots,\ a_1 + k_{\frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)}} d$$

とする。$(a_1 + k_i d, A) = 1$ であるから，

$$(a_2 + k_i d, A) = (a_3 + k_i d, A) = \cdots = (a_B + k_i d, A) = 1$$

となる。ここで

$$a_1 + k_i d,\ a_2 + k_i d,\ \cdots,\ a_B + k_i d, (i\text{ を固定，}1 \le i \le \frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)})$$

は各項が A と素で公差が Ad の等差数列となる。
又，$(a_1 + k_i d, A) = 1$，$(a, d) = 1$ より，$(a_1 + k_i d, d) = 1$ となる。以上より，$(a_1 + k_i d, Ad) = 1$ となる。
そこで，$t = B$ の場合の定理 (帰納法 induction の仮定) の結果を利用すると，上記数列

$$a_1 + k_i d,\ a_2 + k_i d,\ \cdots,\ a_B + k_i d, (i\text{ を固定，}1 \le i \le \frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)})$$

で B と素な項は公差が Ad であるから

$$\frac{\varphi(B \cdot Ad)}{\varphi(Ad)}\text{個}$$

存在する。又，上記 k_i は

$$\frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)}\text{個}$$

あるから，問題の数列で A と素，且つ B とも素，即ち $t = AB$ と素な項は

$$\frac{\varphi(B \cdot Ad)}{\varphi(Ad)} \times \frac{\varphi(Ad)}{\varphi(d)} = \frac{\varphi(td)}{\varphi(d)}$$

個存在する。以上 **Case 1,2** により，t の相異なる素因数の個数に関する帰納法 induction で任意の自然数 t に対して定理は成立し証明は完了する。
□

参考文献

[1] 北村泰一 Kitamura,T.『数論入門 (改訂版)』*Introduction to Number Theory,* (in Japanese), revised ed., 槇書店 Maki-Shoten, 1986(1965 1st ed.), (v+160)pp..

[2] 和田秀男 Wada,H.『数の世界-整数論への道』*The World of Numbers – A Way to Number Theory,* (in Japanese), 岩波書店 Iwanami-Shoten, 1981, (xii+254)pp..

[3] 草場公邦 Kusaba,T.『整数論』*Number Theory,* (in Japanese), 日本放送協会 NHK, 1974, (0+230)pp..

[4] 酒井孝一 Sakai,K.『整数論講義』*Lectures on Number Theory,* (in Japanese), 宝文館 Houbun-Kan, 1976, (v+323)pp..

[5] Vinogradov,I.M.，三瓶与右衛門，山中健訳:『整数論入門』共立出版，1959, (iii+202)pp.. *Introduction to Number Theory* (Japanese translation)，Kyouritsu-Shuppan, Tokyo.

[6] 内山三郎 Uchiyama,S.:『素数の分布』宝文館，1970, (iii+230)pp.. *Distribution of Prime Numbers* (in Japanese)，Houbun-Kan, Tokyo.

(received 31 May 2021.)