線型代数に於ける或る定理
Theorems in Linear Algebra

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要

Abstract

We derive here two theorems(Theorem1,2) in Linear Algebra which are new as far as the author knows. In order to prove them we introduce a new concept called **sub-vector**.

Key words ; linear algebra, vector, **sub-vector**, linearly independent.

Mathematics Subject Classification ; 15A03.

この小論の定理を証明する動機となったものは，著者の講義「経済数学I」で使用した教科書 [1] の中の定理3.1(p.53) の証明が誤りであるからである。(必要条件のみの証明になっていて，全く十分条件については述べていない。即ち，行列の"{列ベクトル表現の列ベクトルの $rank$} $\geq$ {0でない小行列式の最大次数}"の証明にしかなっていず，定理の主張"{列ベクトル表現の列ベクトルの $rank$} $=$ {0でない小行列式の最大次数}"の証明になっていない。) しかし，この教科書は，この点を除き名著である。

補題１
$\mathbf{R}^n \ni \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n,\ A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$(行列 A の列ベクトル表現) に対して，

(i) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が１次独立 $\Longleftrightarrow |A| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| \neq 0$

(ii) $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n$ が１次従属 $\Longleftrightarrow |A| = |\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n| = 0$ □

$$
\begin{aligned}
A &= (\cdots, \boldsymbol{a}_h, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_j, \cdots) \\
&= \begin{array}{c} \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{kh} & \cdots & a_{ki} & \cdots & a_{kj} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{lh} & \cdots & a_{li} & \cdots & a_{lj} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{mh} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mj} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} \end{array}
\begin{array}{l} \\ < k \\ \\ < l \\ \\ < m \\ \\ \end{array}
\end{aligned}
$$

$$
\boldsymbol{a}_h{}' := \begin{pmatrix} a_{kh} \\ a_{lh} \\ a_{mh} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_i{}' := \begin{pmatrix} a_{ki} \\ a_{li} \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}_j{}' := \begin{pmatrix} a_{kj} \\ a_{lj} \\ a_{mj} \end{pmatrix},
$$

$$
A' := (\boldsymbol{a}_h{}', \boldsymbol{a}_i{}', \boldsymbol{a}_j{}') := \begin{pmatrix} a_{kh} & a_{ki} & a_{kj} \\ a_{lh} & a_{li} & a_{lj} \\ a_{mh} & a_{mi} & a_{mj} \end{pmatrix} \text{は} A \text{の小行列.}
$$

補題１より

$$
\begin{aligned}
& |A'| \neq 0 \\
\Longleftrightarrow & \\
& \boldsymbol{a}_h{}', \boldsymbol{a}_i{}', \boldsymbol{a}_j{}' \text{は１次独立} \\
\Longleftrightarrow & \\
& \{x_1' \boldsymbol{a}_h{}' + x_2' \boldsymbol{a}_i{}' + x_3' \boldsymbol{a}_j{}' = \boldsymbol{0} \text{ ならば } x_1' = x_2' = x_3' = 0\} \cdots (*)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{一方,}\quad & x_1 \boldsymbol{a}_h + x_2 \boldsymbol{a}_i + x_3 \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{0} \\
\Longrightarrow & \\
& x_1 \boldsymbol{a}_h{}' + x_2 \boldsymbol{a}_i{}' + x_3 \boldsymbol{a}_j{}' = \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

上記 $(*)$ より

$\Longrightarrow$

$x_1 = x_2 = x_3 = 0$; 即ち $\boldsymbol{a_h}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}$ は 1 次独立

即ち　$|A'| \neq 0 \Longrightarrow \boldsymbol{a_h}, \boldsymbol{a_i}, \boldsymbol{a_j}$ は 1 次独立

この論法と全く同じ論法によって,

定理

$m \leq n,\ m \leq l$ として

$$M(n \times l; \mathbf{R}) \ \mathit{or}\ M(n \times l; \mathbf{C}) \ni A = (\cdots, \boldsymbol{a_{j_1}}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_k}}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_m}}, \cdots) =$$

$$= \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} & j_1 & & j_k & & j_m & \end{array} & \\ \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} & \cdots & a_{i_1 j_m} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_l j_1} & \cdots & a_{i_l j_k} & \cdots & a_{i_l j_m} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \cdots & a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_k} & \cdots & a_{i_m j_m} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ < i_1 \\ \\ < i_l \\ \\ < i_m \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\boldsymbol{a_{j_1}}' := \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} \\ \vdots \\ a_{i_l j_1} \\ \vdots \\ a_{i_m j_1} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_k}}' := \begin{pmatrix} a_{i_1 j_k} \\ \vdots \\ a_{i_l j_k} \\ \vdots \\ a_{i_m j_k} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_m}}' := \begin{pmatrix} a_{i_1 j_m} \\ \vdots \\ a_{i_l j_m} \\ \vdots \\ a_{i_m j_m} \end{pmatrix}$$

$\in \mathbf{R}^m \ \mathit{or}\ \mathbf{C}^m$,

$A' := (\boldsymbol{a_{j_1}}', \cdots, \boldsymbol{a_{j_k}}', \cdots, \boldsymbol{a_{j_m}}')$

$$:= \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} & \cdots & a_{i_1 j_m} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i_l j_1} & \cdots & a_{i_l j_k} & \cdots & a_{i_l j_m} \\ \vdots & & \cdots & & \vdots \\ a_{i_m j_1} & \cdots & a_{i_m j_k} & \cdots & a_{i_m j_m} \end{pmatrix} \in M(m \times m; \mathbf{R}) \ \mathit{or}\ M(m \times m; \mathbf{C})$$

は A の m 次正方小行列.

と置くと

$$\boldsymbol{a_{j_1}}', \cdots, \boldsymbol{a_{j_k}}', \cdots, \boldsymbol{a_{j_m}}' \text{が 1 次独立, 即ち } |A'| \neq 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\boldsymbol{a_{j_1}}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_k}}, \cdots, \boldsymbol{a_{j_m}} \text{ も 1 次独立.}$$

となる。□
が得られる。
この定理の逆が成り立つが、この定理の逆を述べる為に部分ベクトル**sub-vector**或いは小ベクトルと云う概念(中嶋)を導入する：
$m \geq n$として，
n個のベクトル$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n} \in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$から一斉にそれらの第$i_1, i_2, \cdots, i_n$成分を取って作ったn個のベクトル$\boldsymbol{a'_1}, \boldsymbol{a'_2}, \cdots, \boldsymbol{a'_n} \in \mathbf{R}^n$ *or* $\mathbf{C}^n$を元のベクトル$\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n} \in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$の部分ベクトル**sub-vector**或いは小ベクトルと名附ける。即ち

$$\boldsymbol{a_1} := \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{i_1,1} \\ \vdots \\ a_{i_2,1} \\ \vdots \\ a_{i_n,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} := \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ \vdots \\ a_{i_1,2} \\ \vdots \\ a_{i_2,2} \\ \vdots \\ a_{i_n,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_n} := \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{i_1,n} \\ \vdots \\ a_{i_2,n} \\ \vdots \\ a_{i_n,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$,

$$\boldsymbol{a'_1} := \begin{pmatrix} a_{i_1,1} \\ a_{i_2,1} \\ \vdots \\ a_{i_n,1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a'_2} := \begin{pmatrix} a_{i_1,2} \\ a_{i_2,2} \\ \vdots \\ a_{i_n,2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a'_n} := \begin{pmatrix} a_{i_1,n} \\ a_{i_2,n} \\ \vdots \\ a_{i_n,n} \end{pmatrix}$$

$\in \mathbf{R}^n$ *or* $\mathbf{C}^n$,

$$A' = (\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n) = \begin{pmatrix} a_{i_1,1} & a_{i_1,2} & \cdots & a_{i_1,n} \\ a_{i_2,1} & a_{i_2,2} & \cdots & a_{i_2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_n,1} & a_{i_n,2} & \cdots & a_{i_n,n} \end{pmatrix}$$
$$\in M(n \times n; \mathbf{R}) \ or \ M(n \times n; \mathbf{C}),$$
$$A = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$
$$\in M(m \times n; \mathbf{R}) \ or \ M(m \times n; \mathbf{C}).$$

以上の準備の下，以下の定理 1,2 を証明する：

定理 1(中嶋)
$m \geq n$ として，上記 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$ が 1 次独立であれば，それらの部分ベクトル sub-vector $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n \in \mathbf{R}^n$ *or* $\mathbf{C}^n$ で 1 次独立であるものが存在する exist.
この定理を証明するには，この定理の次の対偶 (定理 2) を証明すれば良い。
定理 2(中嶋)
$m \geq n$ として，上記 $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$ の全ての部分ベクトル sub-vector $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n \in \mathbf{R}^n$ *or* $\mathbf{C}^n$ が 1 次従属であれば，元のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n \in \mathbf{R}^m$ *or* $\mathbf{C}^m$ も 1 次従属である。
証明
$m \geq n$ として m に関する帰納法 induction on m で証明する。
$m = n$ のときは，明らかに成り立つ。
$m - 1 \geq n$ (n は任意) のとき成り立つと仮定して $m \geq n$ のときを考える。

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \mathbf{0}$$

$\iff$

$$x_1\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \\ a_{n+1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \\ a_{n+1,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \\ a_{n+1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow (*)$

定理２の前提では「全ての部分ベクトル…」とあるので，特に

$$\boldsymbol{a}'_1 := \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{n,1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{a}'_2 := \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{n,2} \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a}'_n := \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix}$$ が１次従属, $\cdots(\sharp)$

即ち, $A' := |\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n| = 0$

と仮定とする。

$$\iff$$

$$(*)\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,n}x_n = 0 \\ a_{n+1,1}x_1 & +a_{n+1,2}x_2 & +\cdots & +a_{n+1,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\cdots & +a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

$$\iff$$

$$(**)\begin{cases} a_{1,1}x_1 & +a_{1,2}x_2 & +\cdots & +a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 & +a_{2,2}x_2 & +\cdots & +a_{2,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}x_1 & +a_{n,2}x_2 & +\cdots & +a_{n,n}x_n = 0 \end{cases}$$

and

$$(***)\begin{cases} a_{n+1,1}x_1 & +a_{n+1,2}x_2 & +\cdots & +a_{n+1,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & +a_{m,2}x_2 & +\cdots & +a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

($\sharp$) より (**) は非自明な解を持つ。ベクトル $\boldsymbol{a}'_1, \boldsymbol{a}'_2, \cdots, \boldsymbol{a}'_n$ の添え字の番号を付け替える事により $x_1 \neq 0$ として良い。そして $a_{1,1}, a_{2,1}, \cdots, a_{n,1}$ の全てが0となることはない。もし全てが0であるとすると解 $x_1 \neq 0$ が連立1次方程式 (**) の中に存在しなくなり $x_1 = any\ real\ (complex)\ number$ となってしまう。従って (**) の式の番号 (係数行列の行番号) を付け替える事により $a_{1,1} \neq 0$ としても構わない。これより

$$x_1 = -\frac{1}{a_{1,1}}(a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n) \neq 0 \cdots (****)$$

となり，これを $(**)$, $(***)$ に代入して x_1 を消去すると

$$(*****)\begin{cases} (**')\begin{cases} \alpha_{2,2}x_2 & +\alpha_{2,3}x_3 & +\cdots & +\alpha_{2,n}x_n = 0 \\ \alpha_{3,2}x_2 & +\alpha_{3,3}x_3 & +\cdots & +\alpha_{3,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,2}x_2 & +\alpha_{n,3}x_3 & +\cdots & +\alpha_{n,n}x_n = 0 \end{cases} \\ (***')\begin{cases} \alpha_{n+1,2}x_2 & +\alpha_{n+1,3}x_3 & +\cdots & +\alpha_{n+1,n}x_n = 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m,2}x_2 & +\alpha_{m,3}x_3 & +\cdots & +\alpha_{m,n}x_n = 0 \end{cases} \end{cases}$$

上記 $(*****)$ は未知数の個数 $= n-1$, 式の個数 $= m-1$ で $m-1 \geq n-1$ であるので帰納法の仮定を満たし，$(**')$ は非自明な解を持つ。何故ならば $(**')$ の解が $x_2 = x_3 = \cdots = x_n = 0$ のみであれば $(****)$ より $x_1 = 0$ となり，$(**)$ が非自明な解を持つ事に反するからである。従って $(*****)$ は $m-1 \geq n-1$ のときの帰納法の仮定全てを満たしているので帰納法の仮定により $(*****)$ は非自明な解 $x_2, x_3, \cdots, x_n$ を持つ。これをそのまま $(****)$ に代入すれば（このとき $x_2, x_3, \cdots, x_n$ の値に応じて x_1 の値は先の値と異なっても良く勿論 $x_1 = 0$ でも良い。），これは $(*)$ の解であり，従って $(*)$ は $m \geq n$ の場合非自明な解を持つ事となり，$m-1 \geq n-1$ の場合定理が成り立つ事を仮定すれば $m \geq n$ の場合も成り立つ事となり帰納法により定理3.11の証明は完成する。□

定理，定理1,2より，$m \times n$ 行列の rank を次のように定義する：

$$A = (\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1}^T \\ \boldsymbol{b_2}^T \\ \vdots \\ \boldsymbol{b_n}^T \end{pmatrix}$$

をそれぞれ A の列ベクトル表現，行ベクトル表現として

$\mathrm{rank}_{列} A := \mathrm{rank}\{\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \cdots, \boldsymbol{a_n}\}$,

$\mathrm{rank}_{行} A := \mathrm{rank}\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n}\}$,

$\mathrm{rank}_{行列式} A := \{A$ の 0 でない小行列式の最大次数$\}$.

と定義すると定理，定理1,2より

$$\mathrm{rank}_{列} A = \mathrm{rank}_{行} A = \mathrm{rank}_{行列式} A$$

となる。これを改めて

$$\mathrm{rank}A := \mathrm{rank}_{\text{列}}A = \mathrm{rank}_{\text{行}}A = \mathrm{rank}_{\text{行列式}}A$$

と定義して行列 A の **rank** と云う。

参考文献

[1] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,* (in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..

(received 30 January 2021.)