Perron-Frobeniusの定理の証明に就いて
On Proof of Perron-Frobenius' Theorems

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要

Abstract

We give here another proofs(Lemma 1,2,3,4 and Corollary 2) of the parts of Perron-Frobenius' theorem which are new as far as the author knows.

For convenience of the readers, we review Leontief's input-output analysis as application of Perron-Frobenius' theorem as well as the contents of Perron-Frobenius' theorem.

Key words ; linear algebra, Perron-Frobenius' theorem, non-negative matrices, positive matrices.

Mathematics Subject Classification ; 15B48.

§1 Leontiefの産業連関分析 (産業連関論)Input-Output Analysis ：非負行列論 Perron-Frobenius 理論

マクロでは一国，世界に於ける財の流れ(貨幣価値に換算したマネー・フロー)，ミクロでは一つの会社内での財の流れ(マネー・フロー)はそれを数式で表わして分析するのが Input-Output Analysis である。数式(線型代数，特に非負行列論)を使う事により，計画的に財の流れを予見し分析出来るものである。

二つの実例を見てみよう。最初は第2次大戦中のアメリカの例である。第2次大戦前ロシアに生まれたレオンチェフ W.Leontief(1905-1999，露→独→中→米) は 1917 年勃発のロシア革命の混乱で大学教育はドイツで受け経済学の研究をしていたが台頭して来たナチスの脅威から中国へ逃れ中国で1年間中華民国政府経済顧問した後アメリカに渡った。アメリカで長年研究暖めて来た産業連関分析 Input-Output Analysis を発表し，その価値がアメリカ政府により認められアメリカの経済政策に取り入れられた。どのようなものかは後述するが，この Leontief の提唱した経済政策の御蔭で第2次大戦中，食料不足物資不足で苦しんだ欧州各国，日本等を尻目にアメリカは物資不足になって苦しむ事はなかった。アメリカ本土では戦闘がなかったからだと云う意見があるが，ロンドンに爆撃を受けたが，他の多くの所では戦闘も爆撃も受けなかった英国では物資不足に陥った。現在ではアメリカに第二次大戦中物資不足に陥らなかったのは，政府が Leontief の提唱した産業連関分析 Input-Output Analysis による計算結果に従ったからだと考えられている。
もう一つの実例は身近な私の演習ゼミ出身卒業生東浩太郎氏 (2006 年卒業) による話だ。彼は首都圏のコンピュータ関連会社に就職し様々なソフト等を開発する業務に従事しているが，ある会社の社内外の物流、マネー・フローについて様々な部門の支出収入情況をある部門で仮定した場合残りの部門では，どのようにそれを計画設計すべきかと云う依頼でそれをソフトにして如何なるときでも解答が得られるようにとの仕事であったそうである。彼はそれを感慨と驚きをもって私に伝えて来て，私も驚いた。その際使った数学というのが，正に線型代数，産業連関分析 Input-Output Analysis だったと云うのである。産業連関分析と云う訳の「産業」は原語 Input-Output Analysis にはないもので日本で勝手に附けたもので，本来，ある部門の Input-Output の分析 Analysis のはずである。従ってある会社の複数の部門の Input-Output の分析にこの理論は適用出来るのであった。従って以後は原語 Input-Output Analysis を主に使うが例として使うのは産業 (部門) である。
Input-Output Analysis の萌芽はフランス革命 (1789 年) 直前，ルイ Louis 王朝宮廷侍医長であったケネー F.Quesney (1694-1774, 仏) が 60 歳以降に研究を始めて著した『経済表』である。これは国家の家計簿のようなものであったが、家計簿が家計に有用であるのと同じ有用なものであった。その後 19 世紀の著作『資本論』で有名なマルクス K.Marx(1818-1883, 独→英) が，これに興味を寄せ数学を使って発展させようとしたが中年であっ

た為か，数学特に微分積分学が理解出来ず失敗した。その苦闘の跡が菅原仰訳『数学手稿』大月書店，1973 として出版されているが，内容には誤りが多い。その後数理経済学，一般均衡論の創始者の一人ワルラス L.Walras が手を附けたが，決定的結果を実経済にも、もたらしたのは上記レオンチェフであった。レオンチェフは著作『アメリカ経済の構造 1919-1929』(The Structure of American Economy, 1919-1929, Oxford Univ. Press, 1st ed., 1941.) の中でこの理論を展開し，この業績により 1973 年度のノーベル経済学賞を受賞した。

§2 産業連関表 Table of Input-Output (Analysis)

西暦 t 年投入産出表 (産業連関表)Input-Output Table

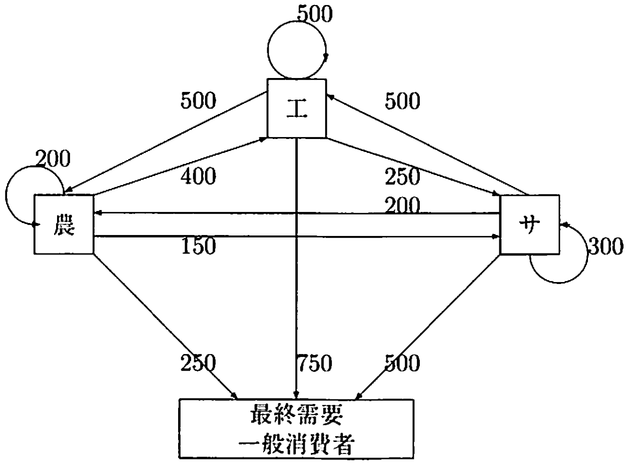

図 1: 西暦 t 年農業工業サービス業の 3 部門のマネー・フロー

→	農業	工業	サービス業	最終需要	総生産高
農業	200	400	150	250	1000
工業	500	500	250	750	2000
サービス業	200	500	300	500	1500
附加価値	100	600	900		
総生産高	1000	2000	1500		

財の流れについて，その単位は財によって重さ，体積等様々なので財の価値を表す価格単位(マネー・フロー)で表す。上記例は農業，工業，サービス業，一般消費者(最終需要と云う)と簡単化されている。既に述べたように農業，工業，サービス業について一般化した部門(前述のように一つの会社の部門でも良いし，農業等を細かく稲作業，畜産業或いは農家一軒一軒とか幾らでも自由に細かくして良い。国自体を部門としても良い。)を考えると，今考えているのは3部門だが一般にn部門を考える事が出来る。

$$
*\left\{\begin{array}{r}
\text{農業総生産高}:1000 = 200+400+150+250 \\
\text{工業総生産高}:2000 = 500+500+250+750 \\
\text{サービス業総生産高}:1500 = 200+500+300+500
\end{array}\right.
$$

図1を説明しよう。例えば農業の総生産高は1000であるが，そのうち200は農業で使用され(例えばサツマイモが畜産の餌として使われる)，400は工業で使用され(例えばサツマイモは焼酎工場で使われる)，一般消費者(最終需要)には250が流れる(サツマイモを一般消費者が食べる)。最終需要からマネー・フローは出ないので最終需要と云う名が附いているが，上記工業への400等は**中間需要**と呼ばれる。

$*$を行列と列ベクトルで表わすと，

$$
\begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 250 \\ 750 \\ 500 \end{pmatrix}
$$

となる。

$$
\begin{pmatrix} 1000 \\ 2000 \\ 1500 \end{pmatrix}
$$

は各部門の西暦 t 年の総生産高を並べたものを**総生産ベクトル**と云って一般に $\boldsymbol{x}(t)$ と表わし，

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 750 \\ 500 \end{pmatrix}$$

は各部門からの西暦 t 年の最終需要であるので**最終需要ベクトル**と云って一般に $\boldsymbol{c}(t)$ と表わす。

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

を西暦 t 年の**投入係数行列**と云って一般に $A(t) = (a_{ij}(t))$ と表わす。先進国ではこの 1-2 成分は比較的大きい (農業生産物を工場で加工する等) が開発途上国では比較的小さいので投入係数行列は考えている国の産業構造 (一つの会社を考える場合は会社の部門構造) を反映してるが，産業構造は短期的に変化する事はないので (一方，総生産ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ は短期的にも変化し得る。)$A(t)$ は時刻 t に対して緩やかに変化するか或いは短期的には変化しない。

一般的には n 部門を考える。従って $\boldsymbol{x}(t)$ は非負の n 成分を持つ実ベクトル，$\boldsymbol{c}(t)$ も非負の n 成分を持つ実ベクトル，$A(t) = (a_{ij}(t))$ は非負の $n \times n$ 実正方行列となり，

$$\boldsymbol{x}(t) = A(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{c}(t) \cdots ①$$

投入係数行列：$A(t)$ $\cdots$ 産業構造を反映

総生産ベクトル：$\boldsymbol{x}(t)$

最終需要ベクトル：$\boldsymbol{c}(t)$ $\cdots$ その国民の消費動向を反映

を満たす。これを **Leontief の基本方程式**と云う。

§3 Leontief の逆行列

景気が良い，好況と云うのは経済活動が活発になる事，即ち「天下の廻りもの」である貨幣或いは貨幣と同じ流動性のあるものの流通速度 (流通回数) が増加する事であると云えるが，この経済活動がある特定の企業間

のみ或いは政府とある特定の企業間のみのものであるなら (安倍内閣以降がこの状態であると考えられる。日銀が多大資金を民間に出しているとしているが，それは一部の企業機関投資家に限られるから株価は上昇しても目標とした２％インフレーションはこの８年間全く達成されていない。このコロナ感染症禍でも株価は上昇している。貨幣量，流通速度が増加すればインフレーションになるはずであるがその貨幣量増加，流通速度増加が経済活動の一部の企業機関投資家のみに起きているからである。) 大多数の国民に好況感を感じないはずである。実際，独裁国家が産業として軍需産業のみを振興していればGDPは増加するかも知れないが，かような事が起こりかねない。従って大多数の国民が好況感を感ずる好況と云うのは最終需要が増加する事であると云える。
Leontief の基本方程式は総生産ベクトルと最終需要ベクトルの関係を与える式とも見なせる。
現在西暦 t 年の各部門の総生産，最終需要は計測する事が可能であるから西暦 t 年の投入係数行列 $A(t)$ を求める事が可能である。投入係数行列は一国の産業構造を反映しているが，産業構造は短期的には変化しないので $A(t) = A(t+1)$ と考えられる。従って翌年西暦 $t+1$ 年の Leontief の基本方程式は

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) &= A(t+1)\boldsymbol{x}(t+1) + \boldsymbol{c}(t+1) \\ &= A(t)\boldsymbol{x}(t+1) + \boldsymbol{c}(t+1) \end{aligned}$$

で与えられ，翌年の $\boldsymbol{x}(t+1)$，$\boldsymbol{c}(t+1)$ は未だ確定している訳ではない。政府が国民の生活を向上させようとある最終需要を想定する場合，想定している最終需要を実現する為にはどのようにすれば良いのか？ 産業構造は短期的に変えられないので総生産ベクトルを変化させて想定した最終需要を実現する。それは次のように Leontief の基本方程式を通じて $\boldsymbol{x}(t+1)$ が計算され，その値を実際に実現すれば良いのである。数学的には至極単純な話である。
$|\mathrm{I} - A(t)| \neq 0$ であれば，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) = A(t)\boldsymbol{x}(t+1) + \boldsymbol{c}(t+1) &\iff (\mathrm{I} - A(t))\boldsymbol{x}(t+1) = \boldsymbol{c}(t+1) \\ &\iff \boldsymbol{x}(t+1) = (\mathrm{I} - A(t))^{-1}\boldsymbol{c}(t+1) \end{aligned}$$

$(\mathrm{I} - A(t))^{-1}$ を **Leontief の逆行列**と云う。
Leontief の逆行列は，解析学ではレゾルベント，物理学等でグリーン関数と云われているものと本質的に同じものである。

各国政府経済機関 (開発途上国を除く) は毎年，この Leontief の逆行列を大型コンピュータを駆使して計算している。低次数の逆行列の計算法でも大変な手間であるが，この行列は何万行何十万行何万列何十万列の行列を扱うので大型コンピュータでも膨大な記憶容量と計算時間を要する為，様々な数学的計算法が工夫されていて線型計算と云う数学分野を形成している程である。

§4 非負行列，非負ベクトル

Leontief の基本方程式は最終需要の変化がもたらす波及効果を表わしているとも考えられる。最終需要ベクトルの変化 $\Delta \boldsymbol{c}(t)$ に伴う総生産量ベクトルの直接変化を $\Delta_1 \boldsymbol{x}(t)$ とすれば，

$$\Delta_1 \boldsymbol{x}(t) = \Delta \boldsymbol{c}(t)$$

となるが，これは間接的中間重要を変化させるので Leontief の基本方程式より

$$\Delta_2 \boldsymbol{x}(t) := A\Delta_1 \boldsymbol{x}(t) = A\Delta \boldsymbol{c}(t)$$

これが又，間接的中間重要を変化させるので Leontief の基本方程式より

$$\Delta_3 \boldsymbol{x}(t) := A\Delta_2 \boldsymbol{x}(t) = AA\Delta \boldsymbol{c}(t) = A^2\Delta \boldsymbol{c}(t)$$

となり，これらが次々と連鎖するので最終的総生産量ベクトルの変化 $\Delta \boldsymbol{x}(t)$ はこれらの累積したもの:

$$\begin{aligned} \Delta \boldsymbol{x}(t) &= \Delta \boldsymbol{c}(t) + A\Delta \boldsymbol{c}(t) + A^2\Delta \boldsymbol{c}(t) + \cdots \\ &= (\mathrm{I} + A + A^2 + \cdots)\Delta \boldsymbol{c}(t) \cdots ② \end{aligned}$$

となる。②の $\mathrm{I} + A + A^2 + \cdots$ は収束しなければ意味を持たない。先ず，この有限和を計算してみる：

$$S_n := \mathrm{I} + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}$$

として

$$AS_n = A(\mathrm{I} + A + A^2 + \cdots + A^{n-1}) = A + A^2 + \cdots + A^{n-1} + A^n$$

に注意して

$$\begin{array}{rl} S_n &= \mathrm{I} + A + A^2 + \cdots + A^{n-1} \\ -) \quad AS_n &= A + A^2 + \cdots + A^{n-1} + A^n \\ \hline (\mathrm{I} - A)S_n &= \mathrm{I} - A^n \end{array}$$

故に $|\mathrm{I}-A|\neq 0$ ならば

$$S_n=(\mathrm{I}-A)^{-1}(\mathrm{I}-A^n)$$

従って

$$\lim_{n\to\infty}A^n=O\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}S_n=\mathrm{I}+A+A^2+\cdots=(\mathrm{I}-A)^{-1}$$

故に②は，$|\mathrm{I}-A|\neq 0$ ならば

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{x}(t)&=(\mathrm{I}+A+A^2+\cdots)\Delta\boldsymbol{c}(t)\\&=(\mathrm{I}-A)^{-1}\Delta\boldsymbol{c}(t)\cdots②'\end{aligned}$$

$\Delta\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{c}(t+1)$ とすれば再び

$$\boldsymbol{x}(t+1)=(\mathrm{I}-A(t))^{-1}\boldsymbol{c}(t+1)\cdots③$$
$$(\mathrm{I}-A(t))^{-1}=\mathrm{I}+A+A^2+\cdots\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}A^n=O\cdots③'$$

が得られる。
注 Keynes の乗数理論と比較すべきである。

ここで新しい記号を定義する：

$\boldsymbol{x}$ の全ての成分が正のとき，$\boldsymbol{x}>\mathbf{0}$ と書き，
行列 A の全ての成分が正のとき，$A>O$ と書く。
これらを正ベクトル，正行列と云う。
$\boldsymbol{x}$ の全ての成分が非負のとき，$\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$ と書き，
行列 A の全ての成分が非負のとき，$A\geq O$ と書く。
これらを非負ベクトル，非負行列と云う。
$\boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\geq\mathbf{0}$
$\boldsymbol{x}>\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}>\mathbf{0}$
$A\geq B\Leftrightarrow A-B\geq O$
$A>B\Leftrightarrow A-B>O$
と定義する．

以後煩わしいので時刻を表わしている $(t),(t+1)$ 等を省略する (既に省略している)。

Input-Output Analysis に出て来るベクトル，行列はどれも非負でなければならない。従って③で任意の非負ベクトル $\boldsymbol{c}(t+1)$ に対して $\boldsymbol{x}(t+1)$ が非負ベクトルとなる為には $(\mathrm{I}-A(t))^{-1}\geq O$ が必要十分である。
$A\geq O$ である事と ③$'$ を合せ考えると

$$(\mathrm{I}-A(t))^{-1}\geq O,\ A\geq O \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}A^n=O,\ A\geq O\cdots④$$

となる。
そして次の定理がある：
Oldenburger の定理

$M(n\times n;\mathbf{C})\ni A$, A の固有値を $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ とし，
$\rho(A):=\max_{1\leq i\leq n}|\lambda_i|\cdots$ 行列 A のスペクトル半径 **spectral radius** と云う．
と置くとき，
$\lim_{n\to\infty}A^n=O\Longleftrightarrow\rho(A)<1$
である．

証明　中嶋眞澄『行列に関する Oldenburger の定理の初等的証明』参照。[6]
この定理より非負行列の固有値を考える事が重要である事が分かる。

§5 Perron-Frobenius ペロン・フロベニウスの定理

この小論の本論である。
Leontief の研究の後 1950 年代，日本の森嶋通夫 (1923-2004)，安井琢磨 (1909-1995) を始め主としてアメリカの数理経済学者が盛んに研究をし数学的結果を出していたが，その大部分は既に 20 世紀初頭 O.Perron ペロン (1880-1975, 独) と G.F.Frobenius(1849-1917) フロベニウスが出していた結果であった。数理経済学者は過去の数学者の出した結果を知らなかったのである。(注)

分解不能性 (既約性)，分解可能性 (可約性)
今 4 部門の経済主体を考える。各部門の番号付けは人口的なものであるから本質的ではない。今第 2 図のように番号付けしたとき，経済主体 $\{3,4\}$ と $\{1,2\}$ について $\{1,2\}$ から $\{3,4\}$ にマネー・フローはあるが $\{3,4\}$ から $\{1,2\}$ にはマネー・フローがない。$\{3,4\}$ は点線で囲んだように一つ

の国と考えられ二つの外国 $\{1,2\}$ から輸入のみの貿易をしているが如くである。この場合，投入係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

となる。部門の番号付けを変更して投入係数行列 A が，この様に表わせるとき行列 A は**分解可能 (可約)** であると云い，如何なる番号付けをしても，このような形とならないとき，**分解不能 (既約)** であると云う。
図3のような場合は勿論分解可能 (可約) であるが，特に**完全分解可能 (完全可約)** であると云って，経済主体 $\{3,4\}$ と $\{1,2\}$ の間には全く経済交流はない。この場合，投入係数行列 A は

$$A = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

となる。
数学的には，ある**置換行列** (成分が0と1のみからなる直交変換の一つ)P により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} B & C \\ \mathbf{0} & D \end{pmatrix}$$

となる A の事である。
注　数学が社会科学も含め他の科学の結果に先行した結果を出した例は枚挙に暇がないが，幾つかの例を挙げてみる：
(1) **イタリアの数学者 Bianchi ビアンキ**：一般相対論は Einstein が1915年に確立した重力理論であるが，長い間応用はされていなかったが，現在では GPS の位置情報を知る際，人工衛星から反射した電波 (電磁波) が地上に戻ってくる場合，重力により電磁波の速度が変化するとともに時間の進行も変化する。これを補正する為に一般相対論の式が使われているのである。一般相対論の基本的方程式は重力場を表わす Einstein の方程式であるが，この式は Einstein が発見する約50年も前にイタリアの数学者 Bianchi ビアンキが発見していた。勿論この式が重力を表わしている

事を発見したのは Einstein であるが，数式そのものは Bianchi が微分幾何学 (リーマン幾何学) の公式として発見していたのである。
(2) **数学者 小倉金之助**：CD, DVD の基礎となるサンプリング定理は情報理論で有名な C.Shannon シャノンが発見した事になっている (Shannon の定理と呼ばれている) が，その 30 年も前に小倉金之助が発見している。これは一般的振動が無限個の固有関数の 1 次結合で表わす事が出来ると云う Fourier 解析の定理が周波数を有限周波数に限定すると (即ち，高周波数と低周波数でカットする) 有限個の固有関数の 1 次結合で済むと云う定理である。これは可視光の全ての色が三原色を混ぜる事で再現出来ると云う昔から知られている事実の一般化である。この定理は不思議な事に小倉金之助と Shannon の発見の間の約 30 年間に再発見が繰り返されている (Whittaker, Kotel'nikov, 染谷勲等)。小倉金之助は帝大出身でなかった (物理学校現東京理科大学出身) 為か，その数学的評価は低く，数学史家としてしか知られていないのは残念な事である。
(3) **英国の数学者 Boole ブール**：Boole が 19 世紀に創始した Boole 代数は現代のコンピュータ演算の基礎であるが取るに足りない代数として長い間完全に無視されていた。

Perron-Frobenius の定理

この定理は Perron(27 歳) が，1907 年，正行列に対して証明したもを 1912 年これに興味を持った Frobenius(63 歳) が非負行列に一般化したものである。
注 正行列は全て分解不能 (既約) である。
補題 1
$M(n \times n; \mathbf{R}) \ni A =: A^{(n)} \geq O$ とし，A の固有方程式，固有多項式を $|\lambda \mathrm{I} - A| = 0$, $B(\lambda) := B^{(n)}(\lambda) := \lambda \mathrm{I} - A$ とする。$B^{(n)}(\lambda)$, A の m 次首座小行列 $(1 \leq m \leq n)$ をそれぞれ $B^{(m)}(\lambda)$, $A^{(m)}$ とする。

$$B^{(m)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1m} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \cdots & \lambda - a_{mm} \end{pmatrix},$$

$$A^{(m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}$$

また，$B^{(m)}(\lambda)$ の成分 $B_{ij}^{(m)} = \lambda\delta_{ij} - a_{ij}$ の余因子を $\tilde{B}_{ij}^{(m)}(\lambda)$ と置く。
このとき，
(1) A は非負の固有値 $\lambda \geq 0$ を持ち，その中で最大のものを $\lambda_{PF}(A)$ と表わし非負行列 A の **Perron-Frobenius** 根と云う。
(2) 更に $x \geq \lambda_{PF}(A)$ ならば $\tilde{B}_{ij}(x) = \tilde{B}_{ij}^{(n)}(x) \geq 0$ である。
証明　n についての帰納法で証明する。補題は $n-1$ まで成立すると仮定する。$n = 1, 2$ のとき明らかに補題は成立する。
帰納法の仮定より $|B^{(n-1)}(\lambda)| = 0$ は非負の根を持ち，その中の最大のものを $\lambda^* := \lambda_{PF}(A^{(n-1)})$ とすれば，$x \geq \lambda^*$ のとき $\tilde{B}_{ij}^{(n-1)}(x) \geq 0$ である。ここに $\tilde{B}_{ij}^{(n-1)}(\lambda)$ は $B^{(n-1)}(\lambda)$ の成分 $B_{ij}^{(n-1)}(\lambda) := \lambda\delta_{ij} - a_{ij}$ の余因子である。

$$|B(\lambda)| = |B^{(n)}(\lambda)| =$$

$$= (\lambda - a_{nn})\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda) + \sum_{k=1}^{n-1}(-a_{nk})\tilde{B}_{nk}^{(n)}(\lambda) \ \cdots \ (\star)$$

$$= (\lambda - a_{nn})\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda) + \sum_{k=1}^{n-1}(-a_{nk}) \cdot (-1)^{n+k}|B_{nk}^{(n)}(\lambda)|$$

($B_{nk}^{(n)}(\lambda)$ は $B^{(n)}(\lambda)$ より第 n 行第 k 列を除いた行列)

$$= (\lambda - a_{nn})\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}(-a_{nk}) \cdot (-1)^{n+k} \sum_{l=1}^{n-1}(-a_{ln}) \cdot (-1)^{l+(n-1)}|B_{nk,ln}^{(n)}(\lambda)|$$

($B_{nk,ln}^{(n)}(\lambda)$ は $B_{nk}^{(n)}(\lambda)$ より，その第 l 行第 n 列を除いた行列)

$$= (\lambda - a_{nn})|B^{(n-1)}(\lambda)| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(-a_{nk})(-a_{ln}) \cdot (-1)^{k+l+(2n-1)}|B_{nk,ln}^{(n)}(\lambda)|$$

$$= (\lambda - a_{nn})|B^{(n-1)}(\lambda)| -$$

$$- \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{nk}a_{ln} \cdot (-1)^{k+l}|B_{kl}^{(n-1)}(\lambda)|$$

($B_{nk,ln}^{(n)}(\lambda) = B_{kl}^{(n-1)}(\lambda)$ に注意)

$$= (\lambda - a_{nn})|B^{(n-1)}(\lambda)| - \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1} a_{nk}a_{ln}\tilde{B}_{kl}^{(n-1)}(\lambda) \quad \cdots (*)$$

注 この式は先ず $|B^{(n)}(\lambda)|$ の第 n 行に関して余因子展開し，
そこに現れた $\tilde{B}_{nn}(\lambda)$ 以外の $(n-1)$ 個の余因子を更に
各成分 $-a_{1n}, -a_{2n}, -a_{n-1,n}$ について余因子展開をすれば得られる。
即ち「2回」余因子展開をするのである。

注 $\tilde{B}_{nk}^{(n)}(\lambda) = \sum_{l=1}^{n-1} a_{lk}\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(\lambda) \quad \cdots (**)$

上記帰納法の仮定により

$$|B^{(n-1)}(\lambda^*)| = \tilde{B}_{nn}(\lambda^*) = 0,\ \tilde{B}_{kl}^{(n-1)}(x) \geq 0\ for\ all\ x \geq \lambda^*$$

であるから，$(*)$ より

$$|B(\lambda^*)| = |B^{(n)}(\lambda^*)| \leq 0.$$

一方，$|B(\lambda)| = |B^{(n)}(\lambda)| = \lambda^n - \cdots$ より十分大きい $x > 0$ に対して $|B(x)| = |B(x)^{(n)}| > 0$. $|B(\lambda)|$ は λ について連続であるから中間値の定理より $\lambda \geq \lambda^*$ 且つ $|B(\lambda)| = 0$ なる λ が存在する。このような λ の中で最大のものを $\lambda_{PF}(A)$ とすれば

$$|B(\lambda_{PF}(A))| = |B^{(n)}(\lambda_{PF}(A))| = 0,$$
$$\lambda_{PF}(A) = \lambda_{PF}(A^{(n)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(n-1)}) = \lambda^*$$

となる。
上記帰納法の仮定：
$\tilde{B}_{kl}^{(n-1)}(x) \geq 0\ for\ all\ x \geq \lambda^*$ と $\lambda_{PF}(A) = \lambda_{PF}(A^{(n)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(n-1)}) = \lambda^*$
を使って $(**)$ より

$$\tilde{B}_{nk}^{(n)}(x) = \sum_{l=1}^{n-1} a_{lk}\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(x) \geq 0$$
$$for\ all\ x \geq \lambda_{PF}(A) = \lambda_{PF}(A^{(n)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(n-1)}) = \lambda^*$$

従って補題(の後半):
非負行列 $A \geq O$ の非負固有値の最大のもの $\lambda_{PF}(A) \geq 0$ が存在し，

$$\tilde{B}_{nk}^{(n)}(x) \geq 0\ for\ all\ x \geq \lambda_{PF}(A)\ (1 \leq k \leq n-1)$$

が証明出来たが，$|B(\lambda)| = |B^{(n)}(\lambda)|$ を第 n 行第 n 列で2回余因子展開した代わりに第 i 行第 i 列で2回余因子展開して上記と同様な過程を経れば

$$\tilde{B}^{(n)}_{kl}(x) \geq 0 \ for \ all \ x \geq \lambda_{PF}(A) \ (1 \leq k, l \leq n)$$

が証明出来る。□

注　この証明は [2], [8], [9] の系統に属す。[9] の証明は混乱している。

他に

Wielandt,H.: Unzerlegbare nicht-negative Matrizen, *Math. Z.*,**52**(1950), 642-48.

に基づいた証明は [1], [4], [5], [12] で，Brouwer の不動点定理を使っているものは [10] である。

上記証明の過程より次が得られる：

系1

$$\lambda_{PF}(A) = \lambda_{PF}(A^{(n)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(n-1)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(n-2)}) \geq \cdots$$
$$\cdots \geq \lambda_{PF}(A^{(2)}) \geq \lambda_{PF}(A^{(1)}) = a_{11} \geq 0$$

補題2(中嶋)

$$\mathrm{rank}\left\{ \boldsymbol{a_1} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} := \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_n} := \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix} \right\} = m < n,$$

$\mathrm{rank}\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n}\} = m < n$ であるとき，

$u_1\boldsymbol{b_1} + u_2\boldsymbol{b_2} + \cdots + u_n\boldsymbol{b_n} = \boldsymbol{0}$

ならば

$u_1\boldsymbol{c_1} + u_2\boldsymbol{c_2} + \cdots + u_n\boldsymbol{c_n} = \boldsymbol{0}$

となる。

注　[7] より

$$\mathrm{rank}\left\{ \boldsymbol{a_1} := \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ c_1 \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} := \begin{pmatrix} b_2 \\ \vdots \\ c_2 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_n} := \begin{pmatrix} b_n \\ \vdots \\ c_n \\ \vdots \end{pmatrix} \right\} = m < n$$

であるとき

$$\mathrm{rank}\,\{\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n}\} = m < n$$

となる

$$\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \cdots, \boldsymbol{b_n}$$

は存在する。

証明

$$\mathrm{rank}\left\{\boldsymbol{a_1} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_n} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_n} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_n} \\ \vdots \end{pmatrix}\right\} = m < n$$

として上記ベクトルの添え字を附け替えて

$$\boldsymbol{a_1} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_1} \\ \vdots \end{pmatrix}, \boldsymbol{a_2} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_2} \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \boldsymbol{a_m} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_m} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_m} \\ \vdots \end{pmatrix}$$

が 1 次独立としても一般性を失わない。すると残りのベクトルはこれら 1 次独立なベクトルの 1 次結合となる：

$$\boldsymbol{a_i} := \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_i} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_i} \\ \vdots \end{pmatrix} = -\sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j} \boldsymbol{a_j} = -\sum_{j=1}^{m} \gamma_{i,j} \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_j} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c_j} \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (i = m+1, \cdots, n)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} &= u_1 \boldsymbol{b_1} + u_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + u_n \boldsymbol{b_n} \\
&= u_1 \boldsymbol{b_1} + u_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + u_m \boldsymbol{b_m} + u_{m+1} \boldsymbol{b_{m+1}} + u_{m+2} \boldsymbol{b_{m+2}} + \cdots + u_n \boldsymbol{b_n} \\
&= u_1 \boldsymbol{b_1} + u_2 \boldsymbol{b_2} + \cdots + u_m \boldsymbol{b_m} + \\
&\quad -u_{m+1} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{m+1,j} \boldsymbol{b_j} - u_{m+2} \sum_{j=1}^{m} \gamma_{m+2,j} \boldsymbol{b_j} - \cdots - u_n \sum_{j=1}^{m} \gamma_{n,j} \boldsymbol{b_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} u_j \boldsymbol{b_j} - \sum_{k=m+1}^{n} u_k \sum_{j=1}^{m} \gamma_{k,j} \boldsymbol{b_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(u_j - \sum_{k=m+1}^{n} u_k \gamma_{k,j} \right) \boldsymbol{b_j}
\end{aligned}$$

となり，

$$b_1, b_2, \cdots, b_m$$

の1次独立性より

$$u_j = \sum_{k=m+1}^{n} u_k \gamma_{k,j} \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

となる。これより

$$\begin{aligned}
&u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2} + \cdots + u_n\mathbf{c_n} \\
&= u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2} + \cdots + u_m\mathbf{c_m} + u_{m+1}\mathbf{c_{m+1}} + u_{m+2}\mathbf{c_{m+2}} + \cdots + u_n\mathbf{c_n} \\
&= u_1\mathbf{c_1} + u_2\mathbf{c_2} + \cdots + u_m\mathbf{c_m} + \\
&-u_{m+1}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{m+1,j}\mathbf{c_j} - u_{m+2}\sum_{j=1}^{m}\gamma_{m+2,j}\mathbf{c_j} - \cdots - u_n\sum_{j=1}^{m}\gamma_{n,j}\mathbf{c_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} u_j\mathbf{c_j} - \sum_{k=m+1}^{n} u_k \sum_{j=1}^{m}\gamma_{k,j}\mathbf{c_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m}\left(u_j - \sum_{k=m+1}^{n} u_k\gamma_{k,j}\right)\mathbf{c_j} \\
&= \sum_{j=1}^{m} 0 \cdot \mathbf{c_j} \\
&= \mathbf{0}. \quad \square
\end{aligned}$$

補題3　非負行列 $M(n \times n; \mathbf{R}) \ni A \geq O$ の Perron-Fribenius 根に属す固有ベクトルは非負である。更に A が分解不能 (既約) であれば，Perron-Frobenius 根に属す固有ベクトルは正ベクトルである。
証明　一般化された余因子展開：

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda\delta_{ik} - a_{ik})\tilde{B}_{jk}^{(n)}(\lambda) = \delta_{ij}|B^{(n)}(\lambda)|$$

ここで上式に $\lambda = \lambda_{PF}(A)$ を代入すると

$$\sum_{k=1}^{n}(\lambda_{PF}(A)\delta_{ik} - a_{ik})\tilde{B}_{jk}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)) = 0 \ for \ all \ i, j = 1, 2, \cdots, n$$

これより，$\tilde{B}^{(n)}_{jk}(\lambda_{PF}(A)) \geq 0$ (補題 1) から

$$\boldsymbol{u}_j(\lambda_{PF}(A)) := \begin{pmatrix} \tilde{B}^{(n)}_{j1}(\lambda_{PF}(A)) \\ \vdots \\ \tilde{B}^{(n)}_{jk}(\lambda_{PF}(A)) \\ \vdots \\ \tilde{B}^{(n)}_{jn}(\lambda_{PF}(A)) \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

と置くと

$$(\lambda_{PF}(A)\mathrm{I} - A)\boldsymbol{u}_j(\lambda_{PF}(A)) = \boldsymbol{0} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

$$\boldsymbol{u}_j(\lambda_{PF}(A)) \neq \boldsymbol{0} \ for\ some\ j$$

ならば，これが求める固有ベクトルである。従って

$$\boldsymbol{u}_j(\lambda_{PF}(A)) = \boldsymbol{0} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

とならないことを，これから示す。これを示す為に n に関する帰納法を考える。

$$\boldsymbol{u}_j(\lambda_{PF}(A)) = \boldsymbol{0} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\tilde{B}^{(n)}_{jk}(\lambda_{PF}(A)) = 0 \ for\ all\ j, k = 1, 2, \cdots, n$$

であるから，特に

$$\tilde{B}^{(n)}_{nn}(\lambda_{PF}(A)) = |\lambda_{PF}(A)\mathrm{I} - A^{(n-1)}| = 0$$

であるから

$$\lambda_{PF}(A) = \lambda_{PF}(A^{(n-1)})$$

帰納法の仮定より，この $A^{(n-1)}$ について補題が成り立っているとする。即ち

$$(\lambda_{PF}(A)\mathrm{I} - A^{(n-1)})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

$$with\ \boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{pmatrix} \geq \boldsymbol{0}\ and\ \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$$

この $\boldsymbol{u}$ を使って

$$(\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

となる事が示すことが出来るので

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\0\end{pmatrix}\geq\mathbf{0}\ and\ \boldsymbol{u}\neq\mathbf{0}$$

は非負な $\lambda_{PF}(A)$ に属す固有ベクトルである。実際

$$(\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\0\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} & & & -a_{1n}\\ & \lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A^{(n-1)} & & \vdots\\ & & & -a_{n-1,n}\\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & \lambda_{PF}(A)-a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{u}\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}(\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A^{(n-1)})\boldsymbol{u}\\ u_1(-a_{n-1,1})+\cdots+u_{n-1}(-a_{n-1,n-1})\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ u_1(-a_{n-1,1})+\cdots+u_{n-1}(-a_{n-1,n-1})\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}u_1B_{11}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A))+\cdots+u_{n-1}B_{1,n-1}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A))\\ \vdots\\ u_1B_{n-1,1}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A))+\cdots+u_{n-1}B_{n-1,n-1}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A))\\ u_1(-a_{n-1,1})+\cdots+u_{n-1}(-a_{n-1,n-1})\end{pmatrix}=$$

$$\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A^{(n-1)}=:(\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\cdots,\boldsymbol{b}_{n-1}),$$

$$\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A^{(n)}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{b}_1 & \boldsymbol{b}_2 & \cdots & \boldsymbol{b}_{n-1} & -a_{1n}\\ & & & & \vdots\\ & & & & -a_{n-1,n}\\ -a_{n-1,1} & \cdots & \cdots & -a_{n-1,n-1} & \lambda_{PF}(A)-a_{nn}\end{pmatrix}=$$

$$=:(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n)$$

$|\lambda_{PF}(A)\mathrm{I}-A^{(n)}|=0$ より $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\cdots,\boldsymbol{a}_{n-1},\boldsymbol{a}_n$ は1次従属，
ここで補題2を使えば

$u_1\boldsymbol{b_1}+\cdots+u_{n-1}\boldsymbol{b_{n-1}}=\boldsymbol{0}$

であるから

$u_1(-a_{n-1,1})+\cdots+u_{n-1}(-a_{n-1,n-1})=0$

となり補題の前半の証明は完了する。□

補題の後半については次の通りである。

固有値 $\lambda_{PF}(A)$ の固有ベクトルが $\boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}$ とはならないと仮定して矛盾を導く。成分の番号附けを分解不能(既約)の概念と同様取り替えて

$$\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{v_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{v_1}>\boldsymbol{0}$$

とすると

$$A\boldsymbol{u}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}=\lambda_{PF}(A)\begin{pmatrix}\boldsymbol{v_1}\\ \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$$

とすると

$$A_{11}\boldsymbol{v_1}=\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{v_1},\ A_{21}\boldsymbol{v_1}=\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}$$

である。A が分解不能(既約)であることから $A_{21}\geq O,\ A_{21}\neq O$ であるが，$\boldsymbol{v_1}>\boldsymbol{0}$ より上記後半の式 $A_{21}\boldsymbol{v_1}=\boldsymbol{0}$ は矛盾している。従って

$$\boldsymbol{u}>\boldsymbol{0}$$

となり補題後半の証明も完了した。□

補題 4　$M(n\times n;\mathbf{R})\ni A\geq O$ が分解不能(既約)ならば

$$\tilde{B}_{ij}^{(n)}(\lambda_{PF}(A))>0\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

証明　n に関する帰納法で証明する。

$n=2$ のとき，A が分解不能(既約)である事と $A>O$ であることは同値であるから B の余因子は明らかに正であるから補題は成り立つ(注)。

$n-1$ まで補題が成り立っていると仮定する。

$A=A^{(n)}$ が分解不能(既約)であれば，$A^{(n-1)}$ は分解不能(既約)であるから帰納法の仮定より

$$\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A^{(n-1)}))>0\Rightarrow\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A^{(n)}))>0$$
$$(\ \lambda_{PF}(A^{(n)})\geq\lambda_{PF}(A^{(n-1)})\ )$$

である。これより補題1の証明で使った

$$\tilde{B}_{nk}^{(n)}(x) = \sum_{l=1}^{n-1} a_{lk}\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(x)$$

より

$$\tilde{B}_{nk}^{(n)}(\lambda_{PF}(A^{(n)})) = \sum_{l=1}^{n-1} a_{lk}\tilde{B}_{lk}^{(n-1)}(\lambda_{PF}(A^{(n)})) > 0 \; for \; i,j = 1,2,\cdots,n.$$

□

系2 $M(n \times n; \mathbf{R}) \ni A \geq O$ が分解不能 (既約) ならば

$$\lambda_{PF}(A) > 0$$

証明 補題1の証明中の $\star$ に $\lambda = \lambda_{PF}(A)$ を代入して

$$0 = |B(\lambda_{PF}(A))| = |B^{(n)}(\lambda_{PF}(A))| =$$
$$= (\lambda_{PF}(A) - a_{nn})\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)) + \sum_{k=1}^{n-1}(-a_{nk})\tilde{B}_{nk}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)).$$

これより

$$\lambda_{PF}(A) = \frac{a_{nn}\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)) + \sum_{k=1}^{n-1} a_{nk}\tilde{B}_{nk}^{(n)}(\lambda_{PF}(A))}{\tilde{B}_{nn}^{(n)}(\lambda_{PF}(A))} > 0.$$

$\tilde{B}_{ij}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)) > 0 \;\; (i,j = 1,2,\cdots,n)$ を使った。□

注 詳しく述べる：

$A^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ として, $\tilde{B}_{12}^{(2)}(\lambda_{PF}(A)) = a_{21} > 0, \tilde{B}_{21}^{(2)}(\lambda_{PF}(A)) = a_{12} > 0,$

$$\tilde{B}_{11}^{(2)}(\lambda_{PF}(A)) = \lambda_{PF}(A) - a_{22} = \frac{(a_{11} - a_{22}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} > 0,$$
$$\tilde{B}_{22}^{(2)}(\lambda_{PF}(A)) = \lambda_{PF}(A) - a_{11} = \frac{(a_{22} - a_{11}) + \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}}{2} > 0.$$

補題5 $M(n \times n; \mathbf{R}) \ni A \geq O$ が分解不能 (既約) ならば
$\lambda_{PF}(A)$ は単根である。

証明 $\varphi(\lambda) := |\lambda \mathrm{I} - A|$ として，$\varphi'(\lambda_{PF}(A)) \neq 0$ を示せば良い。

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}a_{11} & \frac{d}{dx}a_{12} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{d}{dx}a_{21} & \frac{d}{dx}a_{22} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx}a_{n1} & \frac{d}{dx}a_{n2} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \frac{d}{dx}a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d}{dx}a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \frac{d}{dx}a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \frac{d}{dx}a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \frac{d}{dx}a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \cdots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \frac{d}{dx}a_{nn} \end{vmatrix}$$

より

$$\varphi'(\lambda_{PF}(A)) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{B}_{ii}^{(n)}(\lambda_{PF}(A)) > 0.\ (\text{補題}\,4\,\text{より})$$

□.

補題6 $A \geq O$, $Ax \geq \rho x$, $x \geq 0$, $x \neq 0$, $\rho > 0$ ならば $\lambda_{PF}(A) \geq \rho$.
更に A が分解不能 (既約)，$\rho \neq \lambda_{PF}(A)$ と云う前提を加えれば結論は $\lambda_{PF}(A) > \rho$ となる。

証明 $\rho > \lambda_{PF}(A)$ と仮定して矛盾を導く。
Perron-Frobenius 根の定義 (A の非負の固有値の中で最大) と $x > 0$ が十

分大であれば $|x\mathrm{I}-A|>0$ ($|x\mathrm{I}-A|>0$ の最大次係数 >0 から) である事から $|\rho\mathrm{I}-A|>0$ であるが，これより $(\rho\mathrm{I}-A)^{-1}$ が存在する。
これを $A\boldsymbol{x}\geq\rho\boldsymbol{x}\iff\mathbf{0}\geq(\rho\mathrm{I}-A)\boldsymbol{x}$ の左側より掛けると $\mathbf{0}\geq(\rho\mathrm{I}-A)^{-1}(\rho\mathrm{I}-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}\Longrightarrow\mathbf{0}\geq\boldsymbol{x}$ これは前提の $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$ に反する。□
補題後半の証明 $\lambda_{PF}(A)=\lambda_{PF}(A^T)$ に注意する。A が分解不能 (既約) であることから $\boldsymbol{p}^TA=\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{p}^T$, $\lambda_{PF}(A)>0$, $\boldsymbol{p}^T>\mathbf{0}^T$ である。
前提 $A\boldsymbol{x}\geq\rho\boldsymbol{x}$ の左側より $\boldsymbol{p}^T>\mathbf{0}^T$ を掛けると，
$\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{p}^TA)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}^TA\boldsymbol{x}>\rho\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}>0$ となり，両辺を $\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{x}>0$ で割ると $\lambda_{PF}(A)>\rho$ を得る。□
注　転換法により
系３　$A\geq O$, $A\boldsymbol{x}\leq\rho\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\geq\mathbf{0}$, $\boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}$, $\rho>0$ ならば $\rho\geq\lambda_{PF}(A)$.
更に A が分解不能 (既約)，$\rho\neq\lambda_{PF}(A)$ と云う前提を加えれば結論は $\rho>\lambda_{PF}(A)$ となる。
補題７　$M(n\times n;\mathbf{R})\ni A=(a_{ij})\geq O$ の任意の固有値 λ に対して $\lambda_{PF}(A)\geq|\lambda|$.
証明

$$A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}\ \text{として，これを成分表示する事により}$$
$$A\boldsymbol{x}^*\geq|\lambda|\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}^*:=\begin{pmatrix}|x_1|\\ \vdots\\ |x_n|\end{pmatrix}\neq\mathbf{0}.$$

を得る。$\rho:=|\lambda|$ として補題６を適用すると $\lambda_{PF}(A)\geq|\lambda|$.□
別証明　A と A^T の固有値は同じである事に注意する。

$$A^T\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x}\neq\mathbf{0}\ \text{として，これを成分表示する事により}$$
$$A^T\boldsymbol{x}^*\geq|\lambda|\boldsymbol{x}^*,\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}^*:=\begin{pmatrix}|x_1|\\ \vdots\\ |x_n|\end{pmatrix}.$$

を得る。

$$A\boldsymbol{u}=\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{u}\geq\mathbf{0}\ \text{とする。}$$
$$|\lambda|\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*=\boldsymbol{u}^T|\lambda|\boldsymbol{x}^*\leq\boldsymbol{u}^TA^T\boldsymbol{x}^*=(A\boldsymbol{u})^T\boldsymbol{x}^*=\lambda_{PF}(A)\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*\ \cdots①$$

ここで (1) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*>0$, (2) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*=0$ の二つの場合に分ける。
(1) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*>0$ の場合，①の両辺を $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^*$ で割って補題の結論 $|\lambda|\leq\lambda_{PF}(A)$

を得る。
(2) $\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{x}^* = 0$ の場合，n に関する帰納法を用いる。この場合 $\boldsymbol{x}$ の成分の中に 0 であるものがあり，A の列と行の番号附けを分解不能 (既約) の定義のときのように変えると $x_n = 0$ として良い。$x_n = 0$ であるので

$$
\begin{aligned}
& A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} \\
\Longleftrightarrow \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \\
\Longleftrightarrow \quad & \\
& \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}x_j = \lambda x_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n-1) \\
\Longleftrightarrow \quad & \\
& A^{(n-1)}\boldsymbol{x}^{(n-1)} = \lambda\boldsymbol{x}^{(n-1)}, \quad \boldsymbol{x}^{(n-1)} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

帰納法の仮定により $n-1$ 以下では補題が成り立っているので

$$|\lambda| \le \lambda_{PF}(A^{(n-1)}) \le \lambda_{PF}(A^{(n)}) = \lambda_{PF}(A)$$

また，$n = 2$ のときも成り立っている事は容易に確かめられるので帰納法により補題は成立する。$\square$

補題 8　$A_2 \ge A_1 \ge O$ ならば $\lambda_{PF}(A_2) \ge \lambda_{PF}(A_1)$
証明　$A_2\boldsymbol{x_2} = \lambda_{PF}(A_2)\boldsymbol{x_2}$，$\boldsymbol{x_2} \ge \boldsymbol{0}$，$A_1\boldsymbol{x_1} = \lambda_{PF}(A_1)\boldsymbol{x_1}$，$\boldsymbol{x_1} \ge \boldsymbol{0}$
とする。
$A_2\boldsymbol{x_1} \ge A_1\boldsymbol{x_1} = \lambda_{PF}(A_1)\boldsymbol{x_1}$ であるから，補題 6 で $\rho = \lambda_{PF}(A_1)$ とすると $\lambda_{PF}(A_2) \ge \lambda_{PF}(A_1)$．$\square$

以上をまとめると，
Perron-Frobenius の定理
$M(n \times n; \mathbf{R}) \ni A = (a_{ij}) \ge O$ に対して

(1) $\lambda_{PF}(A) \ge 0$，$\lambda_{PF}(A)$ に属す固有ベクトル $\boldsymbol{u_{PF}} \ge \boldsymbol{0}$，
　A が分解不能 (既約) である場合は，$\lambda_{PF}(A) > 0$，$\boldsymbol{u_{PF}} > \boldsymbol{0}$，$\lambda_{PF}(A)$ は単根，
(2) A の他の固有値 $\lambda \ne \lambda_{PF}(A)$ に対して $|\lambda| \le \lambda_{PF}(A)$，

$A > O$ ならば，$|\lambda| < \lambda_{PF}(A)$ ($|\lambda| < \lambda_{PF}(A)$ となる $A \geq O$ を *primitive* と云う.),

(3) $O \leq A \leq B \Rightarrow \lambda_{PF}(A) \leq \lambda_{PF}(B)$,

更に B が分解不能 (既約) ならば，$\lambda_{PF}(A) < \lambda_{PF}(B)$,

注 A が分解不能 (既約) の場合は自動的に B も分解不能 (既約) となる。

(4) $|\lambda| = \lambda_{PF}(A)$ となる相異なる固有値が丁度 h 個ある場合，$\lambda^h = \lambda_{PF}(A)^h$,

(5) $\rho > \lambda_{PF}(A) \Rightarrow (\rho \mathrm{I} - A)^{-1} \geq O$.

(5) の証明

$\lambda_{PF}(A)$ の定義より $\rho > \lambda_{PF}(A)$ ならば $|\rho\mathrm{I} - A| > 0,\ \neq 0$. 従って $(\rho\mathrm{I} - A)^{-1}$ が存在する。

$$\left(\mathrm{I} - \frac{A}{\rho}\right)\left\{\mathrm{I} + \left(\frac{A}{\rho}\right) + \left(\frac{A}{\rho}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{A}{\rho}\right)^{n-1}\right\} = \mathrm{I} - \left(\frac{A}{\rho}\right)^n$$

であるから

$\dfrac{\lambda_{PF}(A)}{\rho} < 1$ ならば, Oldenburger の定理より

$$\left(\mathrm{I} - \frac{A}{\rho}\right)\left\{\mathrm{I} + \left(\frac{A}{\rho}\right) + \left(\frac{A}{\rho}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{A}{\rho}\right)^{n-1} + \cdots\right\} = \mathrm{I}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left(\mathrm{I} - \frac{A}{\rho}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{A}{\rho}\right)^n \mathrm{I} \geq O \quad (A \geq O,\ \rho > 0). \quad \square$$

(3) の後半の証明

$C := \dfrac{A+B}{2}$ も分解不能 (既約) である事に注意する。

B が分解不能 (既約) である事から

$B\boldsymbol{x} = \lambda_{PF}(B)\boldsymbol{x}$ *with* $\lambda_{PF}(B) > 0,\ \boldsymbol{x} > \boldsymbol{0}$.

$\lambda_{PF}(B)\mathrm{I} - C \geq \lambda_{PF}(B) - B$ より

$(\lambda_{PF}(B)\mathrm{I} - C)\boldsymbol{x} \geq (\lambda_{PF}(B) - B)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

これより $(\lambda_{PF}(B)\mathrm{I} - C)\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \lambda_{PF}(B)\boldsymbol{x} \geq C\boldsymbol{x}$ であるから

系3の後半より

$\lambda_{PF}(B) > \lambda_{PF}(C)$.

一方，$C \geq A$ より $\lambda_{PF}(C) \geq \lambda_{PF}(A)$ である事を使うと

$\lambda_{PF}(B) > \lambda_{PF}(C) \geq \lambda_{PF}(A)$,

従って，$\lambda_{PF}(B) > \lambda_{PF}(A)$.　　$\square$

Web 検索への応用
非負行列の理論は，現在インターネット検索 (Google 等) の原理として応用されているが，紙数もないので次の機会に譲る。

参考文献

[1] 古屋茂 Furuya,Sh.『行列と行列式 (増補版)』培風館, 1959, (iv+198)pp., *Matrices and Determinants: revised ed.* (in Japanese), Baihoo-Kan, 1959, (iv+198)pp..
W

[2] Gantmacher,F.R.(translated from Russian and revised by Brenner,J.L., Bushaw,D.W. and Evanusa,S.): *Applications of the Theory of Matrices*, Interscience Publ., 1959, (ix+317)pp..

[3] Horn,R.J. and Johnson,C.A.: *Matrix Analysis,* Cambridge Univ. Press, 1985, (xiii+561)pp..

[4] 木村英紀 Kimura,H.『線形代数』*Linear Algebra,* (in Japanese), 東京大学出版会 the Univ. of Tokyo Press, 2003, (x+233)pp..
W

[5] 小山昭雄 Koyama,A.『線型代数と位相　下：経済数学教室 4』岩波書店, 1994, (ix+311)pp., *Linear Algebra and Topology, vol.2: Mathematics for Economics 4*, (in Japanese), Iwanami-Shoten, 1994, (ix+311)pp..
W(B)

[6] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 行列に関する Oldenburger の定理の初等的証明 An Elementary Proof of Oldenburger's Theorem on Matrix Theory, (in Japanese), 鹿児島経済論集，第 52 巻 (2011 年)，第 1-4 合併号, 29-31. *Kagoshima Journal of Economics,* **52**(2011), 29-31. (This Journal.)

[7] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 線型代数に於ける或る定理 Theorems in Linear Algebra, (in Japanese), 鹿児島経済論集，第 61 巻 (2021 年)，第

4号, 273-281. *Kagoshima Journal of Economics,* **61**(2021), 273-281. (This Journal, this volume.)

[8] 二階堂副包 Nikaido,H.『経済のための線型数学』培風館，1961，(iv+213)pp., *Linear Mathematics for Economics* (in Japanese), Baihoo-Kan, 1961，(iv+213)pp..

[9] 二階堂副包編集 Nikaido,H.ed., 斉藤謹造 Saitoh,K., 根岸隆 Negishi,T., 鈴村興太郎 Suzumura,K., 大槻幹郎 Ohtsuki,M., 堀元 Hori,H., 蝋山昌一 Rohyama.Sh.『経済の数理』筑摩書房，1977，(vi+273)pp.. *Mathematical Economics* (in Japanese), Chikuma-Shobou, 1977, (vi+273)pp..

[10] Serre,D.: Matrices, 2nd ed. Springer, 2009, (xiv+289)pp..
(著者は有名な数学者 Serre,J.P. の甥)
B

[11] 高山晟 Takayama,A.: Mathematical Economics, Dryden Press, 1974, (xxiii+744)pp..

[12] 津野義道 Tsuno,Y.『経済数学 II：線形代数と産業連関論』培風館，1990, (vi+262)pp..
Mathematics for Economics II: Linear Algebra and Input-Output Analysis, Baihoo-Kan, 1990,(vi+262)pp..
W

この小論は新型コロナ感染症 COVID19 禍での講義「数理経済学」のオンライン講義での講義ノート作成中に証明工夫したものである。

(received 30 January 2021.)

追加

参考文献

[1] 渡部睦夫 Watanabe,M.『線形代数』培風館，1984，(vi+181)pp..
B

[2] 室田一雄 Murota,K.，杉原正顕 Sugihara,M.『線形代数 II』丸善出版，2013, (xiii+262)pp..
W

[3] 髙橋礼司 Takahashi,R.『線型代数 II』放送大学教育振興会，1996, (o+203)pp..

[4] 髙橋礼司 Takahashi,R.『線型代数講義』日本評論社，2014, (viii+357)pp..

[5] 田中仁 Tanaka,H.『線形の理論』共立出版，2007, (v+214)pp..
K，(驚くべき事に著者は盲人である。)

[6] Varga,R.S.: *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, 1962, Englewood Cliffs, New Jersey.
(邦訳：渋谷政昭 Shibuya,M.，棚町芳弘 Tanamachi,Y.，金子正久 Kaneko,M.，野田隆 Noda,T. 訳『計算機による大型行列の反復解法』サイエンス社，1972, (vii+290)pp..)
W

[7] Varga,R.S.: *Geršgorin and His Circle*, Springer, 2004, (x+226)pp..
W

[8] Bellman,R.: *Introduction to Matrix Analysis*, 2nd ed., Rand Corpo. 1970, (xxiii+403)pp..
Boh

[9] Lax,P.D.: *Linear Algebra and its Application*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 2007, Hoboken New Jersey.
(邦訳：光道隆 Hikari,M.，湯浅久利 Yuasa,H. 訳『ラックス線形代数』丸善出版，2015, (x+430)pp..)
Boh

[10] 斎藤正彦 Saito,M.『線型代数入門』東京大学出版会，1966, (vii+279)pp..
K

[11] 斎藤正彦 Saito,M.『行列の解析学』東京図書，2017, (vi+208)pp..
K

[12] 伊理正夫 Iri,M., 藤重悟 Fujisige,S.『応用代数』コロナ社，1988, (ix+226)pp..
W

[13] 伊理正夫 Iri,M.『線形代数汎論』朝倉書店，2009, (viii+332)pp..
W

[14] 一松信 Hitotsumatsu,Sh.『線形数学』筑摩書房，1976, (vi+291)pp..
W

[15] 遠山啓 Toyama,H.『ベクトルと行列』日本評論社，1965, (v+186)pp..
B

[16] 南和彦 Minami,K.『線形代数講義』裳華房，2020, (viii+366)pp..
W

[17] Seneta,E.: *Non-Negative Matrices*, George Allen & Unwin Ltd., 1973, (x+214)pp..
W

[18] Berman,A., Plemmons.R.J.: *Nonnegative Matrices in the Mathematical Science*, SIAM, 1994, (xx+340)pp..
W

[19] 児玉慎三 Kodama,Sh., 須田信英 Suda,N.『システム制御のためのマトリクス理論』コロナ社，1981(改訂版), (v+437)pp..
W

[20] 仁木滉 Niki,A., 河野敏行 Kohno,T.『楽しい反復法』共立出版，1998, (vii+130)pp..

[21] 山本哲朗 Yamamoto,T.『数値解析入門』サイエンス社，2003(増訂版), (viii+273)pp..
B

[22] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析の基礎』サイエンス社，2010, (iv+211)pp..
W

[23] 山本哲朗 Yamamoto,T.『行列解析ノート』サイエンス社，2013, (iii+206)pp..

[24] 伊藤昇 Ito,N., 岩井齊良 Iwai,A., 岩堀長慶 Iwahori,N., 上林達治 Kanbayashi,T., 関野薫 Sekino,K., 高橋秀一 Takahashi,S.『経済系・工学系のための行列とその応用 (改訂版)』紀伊國屋書店, 1987, (viii+201)pp..
W

[25] 菊田健作 Kikuta,K.『線形数学』牧野書店, 1992, (vi+254)pp..
K

[26] 加藤敏夫 Kato,T.: *A Short Introduction to Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, 1982, New York.
(邦訳：丸山徹訳『行列の摂動』丸善出版, 1999, (xii+243)pp..)
R

[27] 鈴木雪夫 Suzuki,Y.『経済学のための数学入門 (上)』日本評論社, 1972, (iv+252)pp..
W

注　W は Wielandt の証明, B は Brouwer の不動点定理, K は Krylov の反復法, Boh は Bohnenblust,H. の証明, R は resolvent レゾルベントに基づく証明であることを示す。
Brouwer の不動点定理を使う証明を初めて発表したのは
Alexandroff,P. and Hopf,H.: *Topologie* I, Springer Verlag, Berlin, 1935, (xiv+636)pp..
である。尚, Bohnenblust,H. の証明の文献は見つからない。

(added in February 11, 2021.)

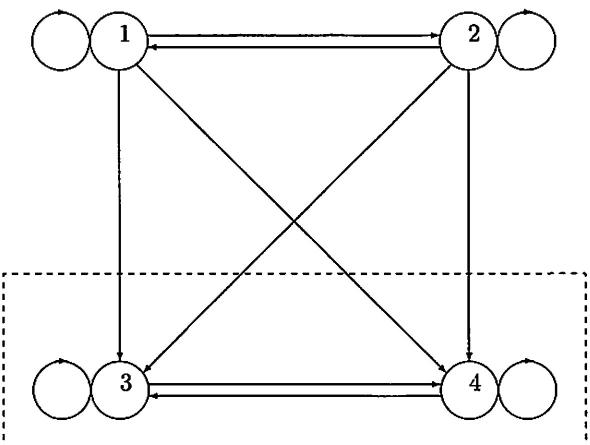

図 2:

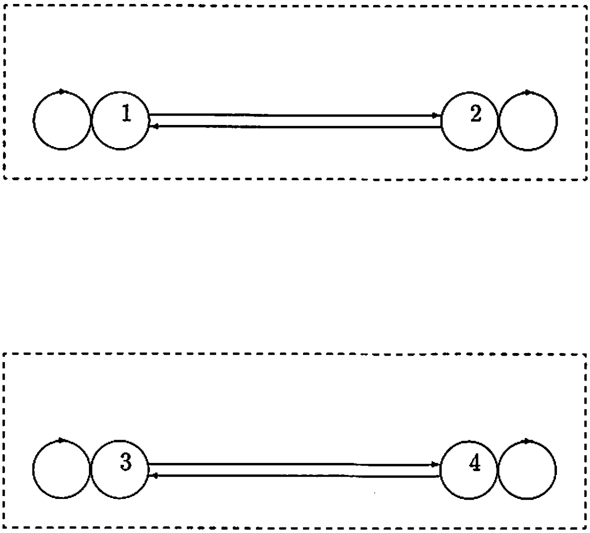

図 3: