原資産(株)価格の2項モデルによる導出
A Derivation of the Price of the Underlying Financial Asset(stock) by Binomial Model

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We derive here the distribution of the price of the underlying financial asset(stock) by binomial model without assuming that the price of the underlying financial asset(stock) follows the logarithmic normal distribution.

Key words ; financial derivative, financial market, underlying financial asset, option, binomial model.

Mathematics Subject Classification ; 91B25,91G99.

$Y(t)$ を時刻 t での原資産価格 (株価)，$C(t) = C(t, Y(t))$ を時刻 t での原資産に関する (コール・) オプション価格とする。r(考えている時間内で

一定) を市場利子率とする。K はオプションの行使価格 delivery price, T は満期日 delivery date を表わす。

1973 年シカゴ穀物市場で世界で初めてオプション (注 1) という金融派生商品が導入され，初めてのことでどのように価格 $C(t)$ を附けていいやら不明で市場は多少混乱したが同年 1973 年に Black と Scholes の論文 [1] が発表され，この混乱は治まった。この論文の中で現在彼等の名を冠した有名な Black-Scholes のオプション価格決定式 option pricing formula:

$$C(t, Y(t)) = Y(t)N(d^+) - Ke^{r(t-T)}N(d^-), \quad (0 \le t \le T) \cdots (1)$$

$$with \;\; N(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

$$d^{\pm} := \frac{\log\left(\frac{Y(t)}{K}\right) + \left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$Y(t) := Y(0)\exp\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right] \cdots (2)$$

$W(t)$ は (標準)Bachelier-Wiener 過程 ((標準)Brown 運動) **注 2**

$$W(t) \sim N(0, t) \cdots \text{平均 } 0, \text{分散 } t \text{ の正規分布}$$

$$\log\frac{Y(t)}{Y(0)} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right) \cdots (3)$$

で $Y(t)$ は幾何 (的)*Brown* 運動 *Geometric Brownian motion* と呼ばれ，

伊藤過程 *Ito process* の特別な場合であり対数正規分布をする。

を導いた。しかし彼等の導き方は混乱して厳密には正しいものではなかったが，結論としての上記 (1) は正しいものであった。それを正したのが Merton [8] であり，伊藤-Doeblin の公式 (補題) [4] [6] [7] [11](注 3) を使っていた。

彼等の方法は原資産価格 (株価)$Y(t)$ が (2),(3) を満たすという前提の下に導かれたものである。つまり原資産価格 (株価)$Y(t)$ が対数正規分布をするということを仮定して (1) が導かれた。これはこの時点 1973 年を遡ること 1955 年 Samuelson [10] は株価が対数正規分布をする事を提唱していた。 その後 1979 年 Cox, Ross, Rubinstein [2] [3] は 2 項 n 期間モデル：

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{1}{(1+r)^n} E_n^Q[(Y_T - K)^+] \\ &= \frac{1}{(1+r)^n} E_n^Q[(Z_n Z_{n-1} \cdots Z_1 Y(t) - K)^+] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^n}\sum_{k=0}^{n}(u^k d^{n-k}Y(t)-K)^+\binom{n}{k}q_u^k q_d^{n-k}\cdots(4)$$
$$x^+ := \max(x,0)$$

E_n^Q は2項分布 $B(n,q_u)$ の平均である。

$$Z_i := \begin{cases} u & (確率\ q_u = \frac{(1+r)-d}{u-d}) \\ d & (確率\ q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}) \end{cases} \quad (i=1,2,\cdots,n)\cdots(5)$$
$$Q=(q_u,q_d)$$

はリスク中立(確率)測度 *risk neutral (probability) measure*
または
マルチンゲール測度 *martingale measure* と呼ばれているものである。
また u,d,r は裁定機会なし *arbitrage oppotunity free* の仮定より
$0 \le d < 1+r < u$ を満たす。($d<1$ である必要はない。)

に対して de Moivre-Laplace の中心極限定理を適用する事により上記 Black-Scholes のオプション価格決定式 option pricing formula(1) を導いた。

この論文では Cox,Ross,Rubinstein の方法を使って原資産価格(株価)$Y(t)$ が対数正規分布をするということを仮定をせずに，2項モデルより原資産価格(株価)$Y(t)$ が対数正規分布をすることを証明する。

注1 後で分かった事だが，江戸時代大坂堂島の米相場で既にオプションに相当する商品が扱われていた。ちなみに江戸時代経済の中心は大坂であり高級な工業製品は上方で作られ「下りもの」として珍重された。逆に「下らない」の語源でもある。

注2 普通単に Wiener 過程 [5] というが Bachelier に敬意を表してこのようにいうことがある。例えば有名な確率論の教科書 Feller,W.: *An Introduction to Probability and its Applications* vol.1,2, John Wiley and Sons, 1950, 1966. (邦訳：河田龍夫，卜部舜一，矢部眞，池守昌幸，大平坦，阿部俊一，国沢清典，羽鳥裕久，『確率論とその応用』I 上下，II 上下，紀伊國屋書店，1960，1969.) ではこのように呼んでいる。Brown 運動はスコットランド生まれの植物学者 Robert Brown が深く研究した現象：プレパラート上の水滴に花粉を落とし破裂してその中から出た微粒子が不規則に運動する現象である。彼はこの現象を探求し原因は無生物の何かに起因するという結論を得，1828 年発表した。(この植物学者 Robert Brown の名はウィスキーの銘柄名にもなっている。)
この後 1905 年 (この年は奇跡の年と言われ 100 年後国連の国際物理学年と

なった。その理由は Albert Einstein がこの年，特殊相対論，光電効果を説明する光量子論，そして Brown 運動の論文というどれもノーベル賞級の論文を発表したからである。)Einstein は Brown 運動は水分子の熱運動に依るという理論的論文を発表し，これにより Avogadro 数を計算する実験が提案され仏の Perrin(この業績でノーベル賞受賞) が実行した。Einstein の拡散係数という用語がこの現象に対してある。
その後 1923 年米国の Nobert Wiener が発見されたばかりの Lebesgue 積分の概念に沿い Brown 運動を測度論的に定義し Wiener 測度 [12] を発見し，今日 Wiener 過程という名が残っている。
しかし驚くべき事に Einstein.Wiener 以前の 1900 年仏の Louis Bachelier が既に Einstein の発見の大部分，Brown 運動が拡散方程式を満たす事，Wiener とは異なる方法で Wiener 過程を発見していた。(Bachelier,L.: Théorie de la spéculation, *Ann. Sci.École Norm. Sup.*, **17**(1900), 21-86.) この Bachelier の埋もれていた業績を発掘したのは先にも述べた Samuelson で 1960 年辺りの頃である。(米国の統計学者 Savage,L.(ベイジアン統計学を 1954 年復活させたが，ベイジアン統計学は経済学周辺で使われているのみで主流とは言い難い。) も Bachelier の埋もれていた業績を発掘した。)Bachelier は Brown 運動をそのまま株価としていたので株価が負になるという困難があったが，Brown 運動を指数関数 e の右肩上に載せ，つまり対数正規分布を採用して，この困難を救ったのが Samuelson である。
Bachelier は生前評価されないどころか，全く無視されていたのでその生涯は明らかでないが (肖像写真は本人とされている 10 歳台の頃のものが 1 枚あるのみである。) 株式市場で働きながら学費を貯め上記学位論文を 30 歳の時に書いた。その学位論文は数学を株価などに応用 (使った) したなどと大変低い評価 (著者の父は戦中の大学経済学部を卒業したが，証券会社は大学卒業者が就職する所ではなく，高卒が就職する所であると言っていて隔世の感がある。) を万能数学者 Poicaré 等から与えられアカデミック・ポジションが得られなかった。スタンダール『赤と黒』に出て来るブザンソンの大学の非常勤講師としてその生涯を終えたらしい。それでも上記学位論文の他に著書が少なくとも 2 冊ある (Bachelier,L.: *Calcul des Probabilités*, Tome I, Gauthier-Villars, 1912, (vii+517)pp., Bachelier,L.: *Les Nouvelle Méthodes du Calcul des Probabilités*, Gauthier-Villars, 1939, (viii+71)pp..)。有名な二人の確率論学者 Lévy,P., Kolmogorov,A,N. の Bachelier に対する評価も分かれ，後になって Lévy は無視した事を後悔している (Lévy,P.: Quelques Aspectes de la

Pensée d'un Mathématicien, Blanchard, Paris, 1970.(邦訳：飛田武幸，山本喜一訳『一確率論学者の回想』，岩波書店，1973.))。

注 3　伊藤が論文 [6] を出した 1942 年以前の 1940 年ドイツとの交戦の最前線にいた仏兵士 Doeblin が自分の論文の続きとなる論文 [4] をフランス科学アカデミーに送ったが，それが開封されたのは何と 2000 年であった。驚くべき事にその論文には伊藤の論文と同様な事が書かれていたのである。Doeblin はこの第 2 次大戦で亡くなっている。従って従来の伊藤の公式ではなく伊藤-Doeblin の公式と呼ぶべきであろう。Doeblin はベルリン生まれであるが父がユダヤ人でナチの迫害を恐れフランスに逃れ Doeblin 自身はフランスで教育を受けた独系仏人である。

定理 1

$$Y(t) = Y(0)\exp\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right] \cdots (2)$$

$$\log\frac{Y(t)}{Y(0)} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right) \cdots (3)$$

証明　2 項 (2 値)n 期間モデルを次のように考える。

$0 \le d < 1 + r < u$ として $Y(t_{k-1})$, $(k = 1, 2, \cdots, n)$ は時刻 t_k には確率 p_u で $Y(t_k) = uY(t_{k-1})$ に，確率 p_d で $Y(t_k) = dY(t_{k-1})$ とジャンプするとする。ここに p_u, p_d は (実) 確率でリスク中立測度 $Q = (q_u, q_d)$ ではない。価格は別の確率に支配されているのである。

2 項 (2 値)n 期間モデルから先の確率変数 $Z_i \cdots (5)$ を使うと

$$\left.\begin{aligned} Y(t) &= Z_n Z_{n-1} \cdots Z_1 Y(0) \\ P\{Z_n Z_{n-1} \cdots Z_1 = u^j d^{n-j}\} &= \binom{n}{j} q_u^j q_d^{n-j} \end{aligned}\right\} \quad \cdots (6)$$

である。

$\log\frac{Y(t)}{Y(0)}$ が望むべき性質を持つ正規分布であることを証明すれば十分である。

(6) より j を確率変数と考えると $j \sim B(n, q_u)$ である。従って

$$\log\frac{Y(t)}{Y(0)} = j\log u + (n - j)\log d = j\log\left(\frac{u}{d}\right) + n\log d \cdots (7)$$

ここで j は確率変数で $B(n, q_u)$ に従う。

$$(8)\cdots\left\{\begin{aligned} E[j] &= nq_u =: nq, \\ V[j] &= nq_u q_d =: nq(1 - q) \end{aligned}\right.$$

であるから

$$\left.\begin{aligned} E[\log \tfrac{Y(t)}{Y(0)}] &= \left\{q \log \tfrac{u}{d} + \log d\right\} n =: \hat{\mu}_q n \\ V[\log \tfrac{Y(t)}{Y(0)}] &= q(1-q) \left\{\log \tfrac{u}{d}\right\}^2 n =: \hat{\sigma}_q^2 n \end{aligned}\right\} \cdots (9)$$

(7) より

$$j = \frac{\log \frac{Y(t)}{Y(0)} - n \log d}{\log \frac{u}{d}}$$

であるから (8),(9) を使って

$$\begin{aligned} \frac{j - nq}{\sqrt{nq(1-q)}} &= \frac{\frac{\log \frac{Y(t)}{Y(0)} - n\log d}{\log \frac{u}{d}} - nq}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma_q}^2}{\left(\log \frac{u}{d}\right)^2} n}} \\ &= \frac{\frac{\log \frac{Y(t)}{Y(0)} - n\log d}{\log \frac{u}{d}} - n\frac{\hat{\mu}_q - \log d}{\log \frac{u}{d}}}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma_q}^2}{\left(\log \frac{u}{d}\right)^2} n}} \\ &= \frac{\log \frac{Y(t)}{Y(0)} - n \log d - n(\hat{\mu}_q - \log d)}{\sqrt{n\hat{\sigma_q}^2}} \\ &= \frac{\log \frac{Y(t)}{Y(0)} - n\hat{\mu}_q}{\sqrt{n\hat{\sigma_q}^2}} \cdots (10) \\ &\sim N(0,1) \ as \ n \to \infty \end{aligned}$$

(de Moivre-Laplace の中心極限定理による)

ここで

$$r \to r\frac{t}{n},$$
$$\begin{cases} u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \sim 1 + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \\ d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \sim 1 - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \end{cases} \qquad (as \ n \to \infty)$$

とおくと

(u, d に $\sqrt{}$ が附く理由はランダム・ウォークの $\Delta s = \sigma\sqrt{\Delta t}$ に起因する。)

$$q_u := \frac{(1+r) - d}{u - d} = \frac{1 + r\frac{t}{n} - \left(1 - \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t}{n} - \cdots\right)}{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} =$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r\frac{t}{n} + \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{t}{n} + \cdots}{2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} = \\
&= \frac{r}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}} + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\frac{t}{n}} + \cdots = \\
&\sim \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}, \\
q_d &\sim \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}, \\
\hat{\mu}_q n &= q\log\left(\frac{u}{d}\right)n + n\log d \sim \\
&\sim \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right\}2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}n + n\left(-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \\
&= \frac{1}{2}2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}n + \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}n + n\left(-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}\right) = \\
&= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \\
\sqrt{n\hat{\sigma}_q^2} &= \sqrt{n\left(q(1-q)\left\{\log\frac{u}{d}\right\}^2\right)} \sim \\
&\sim \sqrt{n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)\sqrt{\frac{t}{n}}\right)\left\{\log\frac{u}{d}\right\}^2} = \\
&= \sqrt{\left\{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2\frac{t}{n}\right\}n4\sigma^2\frac{t}{n}} \\
&= \sqrt{\left\{1 - \left(\frac{r - \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}\right)^2\frac{t}{n}\right\}\sigma^2 t} \to \sqrt{\sigma^2 t}, \\
\log\frac{u}{d} &= 2\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \to 0 \quad as\ n \to \infty.
\end{aligned}
$$

となるので(10)より $n \to \infty$ のとき

$$
\frac{\log\frac{Y(t)}{Y(0)} - n\hat{\mu}_q}{\sqrt{n\hat{\sigma}_q{}^2}} \to \frac{\log\frac{Y(t)}{Y(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t}{\sqrt{\sigma^2 t}} \sim N(0,1)
$$

$\Longrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& \log\frac{Y(t)}{Y(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \sim \sqrt{\sigma^2 t}N(0,1) \\
\Longrightarrow \quad & \log\frac{Y(t)}{Y(0)} - \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t \sim N(0,\sigma^2 t) \\
\Longrightarrow \quad & \log\frac{Y(t)}{Y(0)} \sim \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + N(0,\sigma^2 t) \\
\Longrightarrow \quad & \frac{Y(t)}{Y(0)} \sim \exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + N(0,\sigma^2 t)\right\}
\end{aligned}
$$

即ち

$$
Y(t) = Y(0)\exp\left[(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)\right] \cdots (2)
$$

$$
\log\frac{Y(t)}{Y(0)} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t) \sim N\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right) \cdots (3)
$$

の証明は完了した。□

$$
\begin{tikzcd}
t_0 = 0 & t_1 = \frac{t}{n} & t_2 = 2\left(\frac{t}{n}\right) \\
\phi_0 \arrow[r] & (1+r)\phi_0 \arrow[r] & (1+r)^2\phi_0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & Y_2(UU) = uuY_0 \\
 & Y_1(U) = uY_0 \arrow[ur, "p_U"] \arrow[dr, "p_D"'] & \\
Y_0 \arrow[ur, "p_U"] \arrow[dr, "p_D"'] & & \begin{array}{c} Y_2(UD) = udY_0 \\ Y_2(DU) = duY_0 \end{array} \\
 & Y_1(D) = dY_0 \arrow[ur, "p_U"] \arrow[dr, "p_D"'] & \\
 & & Y_2(DD) = ddY_0
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & C_2(UU) \\
 & C_1(U) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
C_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \begin{array}{c} C_2(UD) \\ C_2(DU) \end{array} \\
 & C_1(D) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & C_2(DD)
\end{tikzcd}
$$

参考文献

[1] Black,F., Scholes,M.: The pricing of options and corporate liabilities, *J. Political Economy*, **81**(1973), 637-659.

[2] Cox,J.C., Ross,S., Rubinstein,M.: Option pricing: a simplified approach, *J. Financial Economics*, **3**(1979), 145-166.

[3] Cox,J.C., Rubinstein,M.: *Options Markets*, Prentice-Hall, New Jersey, 1985, (ix+498)pp..

[4] Doeblin,W.: Partie II Sur l'equation de Kolmogoroff, *C.R.Acad.Sci.*, Ser.I, **331**(2000), 1059-1102.

[5] Doob,J.L.: *Stochastic Processes*, J.Wiley and Sons, New York, 1953, (vii+654)pp..

[6] 伊藤清 Ito,K.:「Markoff過程ヲ定メル微分方程式」A differential equation which defines Markov processes (in Japanese), 全国紙上談話会誌(大阪大学編集)Zenkoku-Sizyou-Danwakai-Shi, ed. by Osaka Univ.

244-no.1077(1942), 1352-1400.
Ito,K.: On stochastic processes (I), *Japan J.Math.*, **18**(1942), 261-301.

[7] Mantenga,R.N., Stanley,H.E.: *An Introduction to Econophysics—Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄訳『経済物理学入門—ファイナンスにおける相関と複雑性』，訳者による付録1 微分積分初歩 (p.186), エコノミスト社，東京，2000.)

[8] Merton,R.: Theory of rational option pricing, *Bell J. Econom. Manag. Sci.*, **4**(1973), 141-183.

[9] 仁科一彦 Nishina,K., 小谷眞一 Kotani,Sh., 長井英生 Nagai,H., 大西匡光 Ohnishi,M., 谷川寧彦 Tanigawa,Y., 関根順 Sekine,J.『金融工学』*Mathematical Finance,* (in Japanese), 大阪大学出版会 Osaka Univ.Press, 2003.

[10] Samuelson,P.: Brownian motion in the stock market, unpublished, 1955.

[11] Shreve,S.E.: *Stochastic Calculus for Finance* I,II, Springer-Verlag, New York, 2004, 2005.
(邦訳：長山いづみ他(河野祐一,田中久充,長森英雄,今井達也)訳『ファイナンスのための確率解析 I,II』，シュプリンガー・フェアラーク東京，東京，2006,2008. 現在出版社は丸善出版に移管)

[12] Wiener,N.: Differential space, *J.Math.Phys.*, **2**(1923), 131-174.

(received 15 July 2020.)