一部から誤解されている初等微積分のある定理

An Often Misunderstood Theorem in Elementary Calculus

中嶋眞澄

Masumi Nakajima

Department of Economics

International University of Kagoshima

Kagoshima 891-0197, JAPAN

e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We prove here a theorem on certain convergent complex sequence which is often misunderstood invalid by some people even by some mathematician? Unfortunately there is no proof of it as far as the author knows. But its proof is easy and very elementary.

Key words ; Napier's constant, complex sequence, convergence.

Mathematics Subject Classification ; 40A05.

$e = 2.718281828459\cdots$ を Napier の定数，$x \in \mathbf{R}$ であるとき

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{x}{\nu}\right)^{\nu} = e^{x}$$

が成立するが，これは初等微積分学を学んだ者なら，誰もが知っている有名な事実である。しかし，$x \in \mathbf{C}$ となると，これは成り立たないと言う数学専門家?もいるのは驚きである。

定理 1 $A \in \mathbf{C}$ とすれば，次が成り立つ:

$$\lim_{\nu\to\infty}\left(1+\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{\nu}=e^{A}$$

o, O は Bachmann-Landau の記号で複素数 $\mathbf{C}$ を含み，
$\nu\to\infty$ のときのものである。

証明

$$C_\nu:=\left(1+\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{\nu}$$

と置いて対数を取る:

$$\log C_\nu=\nu\log\left(1+\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)$$

十分大きい ν $(1\ll\nu)$ に対して

$$\left|\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right|<1$$

であるので上記 $\log\cdots$ を Taylor 展開して

$$\log C_\nu=\nu\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{n}=$$

$$=A+\mathrm{o}(1)+$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(A+\mathrm{o}(1)\right)\left(\frac{A}{\nu}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right)^{n-1}$$

$$=A+\mathrm{o}(1)+$$

$$+\left(A+\mathrm{o}(1)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left\{\frac{1}{\sqrt{\nu}}\left(\frac{A}{\sqrt{\nu}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right)\right\}^{n}$$

$$=A+\mathrm{o}(1)+$$

$$+\left(A+\mathrm{o}(1)\right)\frac{1}{\sqrt{\nu}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)^{n-1}\left(\frac{A}{\sqrt{\nu}}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right)^{n}$$

$\left|\dfrac{A}{\sqrt{\nu}}+\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\nu}}\right)\right|<1\quad for\quad \nu\gg 1$ であるので

上記和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ は収束する

$$=A+\mathrm{o}(1)+\left(A+\mathrm{o}(1)\right)\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)$$

従って

$$\log C_\nu=A+\mathrm{o}(1)+\left(A+\mathrm{o}(1)\right)\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{\nu}}\right)=A+\mathrm{o}(1),$$

を得る。
故に

$$\lim_{\nu\to\infty}\log C_\nu = A, \quad \lim_{\nu\to\infty} C_\nu = e^A.$$

となり証明が完成する。□
この定理の応用として有名な
Euler の公式：
$\theta \in \mathbf{R}$ に対して

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

の別証明が得られる。
注　普通この公式の証明は左辺と右辺を Taylor 展開し左右を比較する事で行われる。
証明 $n \in \mathbf{N}$ として de Moivre の定理を使うと

$$\cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n$$

であるが，cos, sin を Taylor 展開すると

$$\cos\theta + i\sin\theta = \left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right)^n =$$
$$= \left(1 + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\theta}{n}\right)^2\right) + \frac{i\theta}{n} + \mathrm{O}\left(\left(\frac{\theta}{n}\right)^3\right)\right)^n$$
$$= \left(1 + \frac{i\theta}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n$$

ここで**定理 1** を使って $n \to \infty$ とすると

$$\cos\theta + i\sin\theta = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{i\theta}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n = e^{i\theta}$$

が得られる。□

参考文献

[1] Mantenga,R.N., Stanley,H.E.: *An Introduction to Econophysics—Correlations and Complexity in Finance*, Cambridge Univ. Press,

2000.
(邦訳：中嶋眞澄訳『経済物理学入門―ファイナンスにおける相関と複雑性』，訳者による付録1 微分積分初歩 (p.186)，エコノミスト社，東京，2000.)

(received 18 May 2020.)