$$\sum_{l+m=k,l,m\geq 0}\binom{\alpha+l-1}{l}\binom{\beta+m-1}{m} = \binom{\alpha+\beta+k-1}{k}$$

と負の二項分布への応用

and its Application to Negative Binomial Distribution

中嶋眞澄

Masumi Nakajima

Department of Economics

International University of Kagoshima

Kagoshima 891-0197, JAPAN

e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要

Abstract

We prove here the following equation:

$$\sum_{l+m=k,l,m\geq 0}\binom{\alpha+l-1}{l}\binom{\beta+m-1}{m} = \binom{\alpha+\beta+k-1}{k}$$

and give its application to prove the reproductive property of the negative binomial distribution.

These finite sum equation involving binomial coefficients and proof of the reproductive property are not known as far as the author knows.

Key words ; binomial coefficient, negative binomial distribution.

Mathematics Subject Classification ; 05A10,60C05.

$\alpha \in \mathbf{R}$ として、一般化された２項係数を，次で定義する：

$$\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.$$

次の等式が成り立つ。

定理１　$\alpha, \beta > 0$ とすれば，次が成り立つ。

$$\sum_{l+m=k, l,m \geq 0} \binom{\alpha+l-1}{l}\binom{\beta+m-1}{m} = \binom{\alpha+\beta+k-1}{k}$$

注　これと似た等式：

$$\sum_{l+m=k, l,m \geq 0} \binom{\alpha}{l}\binom{\beta}{m} = \binom{\alpha+\beta}{k}$$

は

$$(1+x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} = (1+x)^{\alpha+\beta}$$

の左辺，右辺をそれぞれ $|x| < 1$ で２項展開して：

$$\left(1+\sum_{l=1}^{\infty}\binom{\alpha}{l}x^l\right)\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\binom{\beta}{m}x^m\right) = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{k}x^k$$

x^k の項の係数を比較することにより簡単に得られるが，この定理の場合左辺のそれぞれの２項係数の上側に動く l, m が現れている為困難であるように見える。しかし，この方法と実質的に同じ方法が適用出来るのである。

証明 $\alpha > 0$ として $|x| < 1$ で $(1+x)^{-\alpha}$ の２項展開を変形する：

$$\begin{aligned}(1+x)^{-\alpha} &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)\cdots(-\alpha-k+1)}{k!}x^k \\ &= 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!}(-1)^k x^k\end{aligned}$$

即ち

$$(1-x)^{-\alpha} = 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+k-1)}{k!}x^k$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha + k - 1}{k} x^k$$

となり，これを用いる。

$$(1-x)^{-\alpha}(1-x)^{-\beta} = (1-x)^{-(\alpha+\beta)}$$

の両辺を $|x| < 1$ で 2 項展開:

$$\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \binom{\alpha + l - 1}{l} x^l\right)\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\beta + m - 1}{m} x^m\right) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha + \beta + k - 1}{k} x^k$$

し，x^k の項の係数を比較して

$$\sum_{l+m=k, l,m \geq 0} \binom{\alpha + l - 1}{l}\binom{\beta + m - 1}{m} = \binom{\alpha + \beta + k - 1}{k}$$

を得る。□

負の 2 項分布 NB(α, p)

確率密度：$p(k)$ が

$$p(k) := \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha} q^k,\ k = 0, 1, 2, \cdots,\ p, q \geq 0,\ p + q = 1$$

で与えられる確率分布を負の 2 項分布，又は Pascal 分布という。賭博を中断した場合の賞金の分配問題に関して Chevalier de Méré(1610-1684) から数学的相談を受けた Blaise Pascal(1623-1662) が Pierre de Fermat(1601-1665) との往復書簡で考察した確率分布であることが，その名の由来である。この往復書簡が数学的確率論の始まりとされている。具体的には表の出る確率が p, 裏の出る確率が q である 1 枚のコインを何回か投げ上げ，α 回表が出るまでに裏が k 回出る確率を与えている。

確率変数 X がこの確率分布に従うことを記号で $X \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$ と表わし，$X = k$ となる確率 $P\{X = k\}$ は

$$P\{X = k\} = \binom{\alpha + k - 1}{k} p^{\alpha} q^k =: p_X(k)$$

である。

負の 2 項分布の再生性 Reproductive property of Negative Binomial Distribution

$X \sim \mathrm{NB}(\alpha, p)$, $Y \sim \mathrm{NB}(\beta, p)$, X, Y は独立であるとする。
このとき $Z := X + Y \sim \mathrm{NB}(\alpha + \beta, p)$ である。

注　再生性を持つ確率分布としては，2 項分布 binomial distribution，Poisson 分布，正規分布 normal distribution，Gamma 分布，χ^2 分布，Cauchy 分布がある。通常再生性の証明には特性関数 characteristic function 又は積率母関数 moment generating function が使われるが以下の証明は初等的である。

証明

$$
\begin{aligned}
p_Z(k) &= P\{Z = k\} = P\{X + Y = k\} \\
&= \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} P\{X = l\} P\{Y = m\} \text{ (独立性より)} \\
&= \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} p_X(l) p_Y(m) \\
&= \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} \binom{\alpha + l - 1}{l} p^\alpha q^l \binom{\beta + m - 1}{m} p^\beta q^m \\
&= p^{\alpha+\beta} \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} \binom{\alpha + l - 1}{l} \binom{\beta + m - 1}{m} q^{l+m} \\
&= p^{\alpha+\beta} \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} \binom{\alpha + l - 1}{l} \binom{\beta + m - 1}{m} q^k \\
&= p^{\alpha+\beta} q^k \sum_{l+m=k, l, m \geq 0} \binom{\alpha + l - 1}{l} \binom{\beta + m - 1}{m} \\
&= p^{\alpha+\beta} q^k \binom{\alpha + \beta + k - 1}{k} \text{ (定理 1 を使った)} \\
&= \binom{(\alpha + \beta) + k - 1}{k} p^{\alpha+\beta} q^k
\end{aligned}
$$

従って $Z \sim \mathrm{NB}(\alpha + \beta, p)$ である。□

参考文献

[1] I.Todhunter: *History of the Mathematical Theory of Probability From the Time of Pascal to that of Laplace*, Macmillan, London, 1865.
(邦訳：安藤洋美訳『確率論史』現代数学社，京都，1975.)

[2] 森口繁一，宇田川銈久，一松信 S.Moriguchi, K.Udagawa, Sh.Hitotsumatsu: 『数学公式 II －級数・フーリエ級数－』岩波書店，1957.
Mathematical FormulasII-Series, Fourier Series- (in Japanese), Iwanami-shoten, Tokyo, 1957.

[3] 蓑谷千凰彦 Ch.Minotani:『数理統計ハンドブック』みみずく舎，2009.
Handbook of Mathematical Statistics (in Japanese), Mimizuku-sha, Tokyo, 2009.

(received 6 January 2019.)