$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$$ の単調性

Monotonity of the Sequence $$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

中嶋眞澄
Masumi Nakajima
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We study here the monotonity of the sequence:

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

Key words ; monotonity of sequences, Napier's constant,Euler's number,e.

Mathematics Subject Classification ; 26A12.

初等微分積分学において，自然対数の底(Napier's constant):$e = 2.7182818284\cdots$ を導入する際，数列：

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

が，十分大きい n に対して
(1) 単調増加である
(2) 上に有界である ($(1+\frac{1}{n})^n < 3$)
であることを，2項定理を使って証明し

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

が存在することを Weierstrass の定理 ([1],p.125, 定理 4.8) を使って示して，これを e という記号で表わしている。
一方，数列

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

に対しては，相加相乗平均の不等式を使って初等的に，十分大きい n に対して
(1) 単調減少である
(2) 下に有界 (これは正数の数列であるので明らか)
であることが示され [2]，上記と同じ極限値を持つことが同じく Weierstrass の定理 ([1],p.125, 定理 4.8) を使って示される：

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\} = \lim_{n\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad (\ [1]\ )$$

ここで問題が湧き起こる：

$$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}.$$

は，如何なる α で単調減少，単調増加となるか？ 答えは次の通りである。

定理 1 十分大きい n に対して

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} = \begin{cases} \text{狭義の単調増加}, & (\alpha < \frac{1}{2}) \\ \text{狭義の単調減少}, & (\frac{1}{2} \le \alpha) \end{cases}$$

証明 $(1+\frac{1}{n})^{n+\alpha}$ の単調性を見るには，この対数を取って $n \to x$ にしたもの

$$f_\alpha(x) := (x+\alpha)\log(1+\frac{1}{x})$$

の単調性を見れば良い。$f_\alpha(x)$ の導関数の正負を考える。
十分大きい x に対して

$$f'_\alpha(x) = \log(1+\frac{1}{x}) + (x+\alpha)\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

であるが，$0 < \frac{1}{x}$ は十分小さいのでこれを Taylor 展開をすると

$$\begin{aligned}
&f'_\alpha(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\frac{1}{x^k} - (x+\alpha)\frac{1}{x^2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{1}{x}\right)^k \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{1}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{1}{x^4} + \cdots - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^5} + \cdots \\
&-\frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha}{x^3} - \frac{\alpha}{x^4} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{1}{x^2} + \left(-\frac{2}{3}+\alpha\right)\frac{1}{x^3} + \left(\frac{3}{4}-\alpha\right)\frac{1}{x^4} + \left(-\frac{4}{5}+\alpha\right)\frac{1}{x^5} + \cdots \\
&= \left(\frac{1}{2}-\alpha\right)\frac{1}{x^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \begin{cases} >0, & (\alpha < \frac{1}{2}) \\ <0, & (\frac{1}{2} < \alpha) \end{cases}
\end{aligned}$$

$\alpha = \frac{1}{2}$ のとき

$$\begin{aligned}
f'_{\frac{1}{2}}(x) &= \left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^3} + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^4} + \left(-\frac{4}{5}+\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^5} + \cdots \\
&= -\frac{1}{6x^3} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^4}\right) < 0.
\end{aligned}$$

となる。従って十分大きい x に対して

$$f'_\alpha(x) = \begin{cases} >0, & (\alpha < \frac{1}{2}) \\ <0, & (\frac{1}{2} \le \alpha) \end{cases}$$

を得る。これで定理の証明は完了した。□

参考文献

[1] 一松信 Sh.Hitotsumatsu: 『解析学序説　上巻』p.146, 裳華房, 1962. *Introduction to Mathematical Analysis* (in Japanese), p.146, Shokabou, Tokyo, 1962.

[2] 一松信 Sh.Hitotsumatsu:『コーシー近代解析学への道』p.52,53, 現代数学社，京都，2009.
Cauchy : *The Way to Modern Analysis* p.52,53, (in Japanese), Gendaisugaku-sha, Tokyo, 2009.

(received 6 January 2019.)