# 有限群の類演算子表現の積と構造定数
# Representations of Class Operators and Structure Constants in Finite Groups

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
*Department of Economics*
*International University of Kagoshima*
*Kagoshima 891-0197, JAPAN*
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

**概 要**

**Abstract**

In this short paper, we give a proof of a theorem on representations of class operators with structure constants in finite groups.

Key words ; representation of finite group, class operator, structure constant.
Mathematics Subject Classification 2010;　20C05.

$G$を位数$r$の有限群とし，そのある部分群を$H$とする。$H$による群$G$の類別(左剰余類，右剰余類を取っても良い)を

$$G = g_1H \cup g_2H \cup \cdots \cup g_mH, \quad C_i := g_iH \ (i = 1, 2, \cdots, m,\ r = hm,\ h \in \mathbf{N})$$

とし，次の形式和(体$\{0, 1\}$上の群$G$の群環group ringの元)

$$\mathbf{C}_i := \sum_{a \in C_i} a$$

を類演算子 class operator という。類演算子は次の性質を持つ。

$$(1)\quad g\mathbf{C}_i g^{-1} = \mathbf{C}_i \quad for\ \forall g \in G,\ i = 1, 2, \cdots, m,$$

$$(2)\quad [\mathbf{C}_i, \mathbf{C}_j] = 0,\ for\ \forall i, j = 1, 2, \cdots, m\ (\ [A, B] := AB - BA\ ),$$

$$(3)\quad \mathbf{C}_i\mathbf{C}_j = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k \mathbf{C}_k \quad i, j = 1, 2, \cdots, m,\ c_{ij}^k \geq 0.$$

（ $c_{ij}^k$ を構造定数という ).

$D(g)$, $g \in G$ を群 $G$ の $d$ 次元表現 $d$-dimensional representation of $G$ とする。又，類演算子の $D$ による表現 $D(\mathbf{C}_k)$ を

$$D(\mathbf{C}_k) := \sum_{g \in \mathbf{C}_k} D(g)$$

で定義する (この定義は行列の加法が定義されているので well-defined である) と，次の**定理 1** が成り立ち良く使われるが，その明確な証明を，知っている限り見た事がないので，その証明をここに書くのも価値がない事ではないと考えられる。

**定理 1**

$$D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j) = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k D(\mathbf{C}_k)$$

**注意** 定理の $c_{ij}^k$ は上記 (3) の $c_{ij}^k$ と等しい。

**証明** $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_r\}$ とし $g_l^{(i)} \in \mathbf{C}_i$ に対して

$$\begin{aligned}
\sum_{a=1}^{r} D(g_a g_l^{(i)} g_a^{-1}) &= \sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(g_l^{(i)})D(g_a^{-1}) \\
&= \sum_{a=1}^{r} D(g_a g_b)D(g_l^{(i)})D((g_a g_b)^{-1}) \\
&= \sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(g_b)D(g_l^{(i)})D(g_b^{-1})D(g_a^{-1}) \\
&= \sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(g_b g_l^{(i)} g_b^{-1})D(g_a^{-1}) \\
(1)\text{ より}, \quad & g_b g_l^{(i)} g_b^{-1} =: g_{l'}^{(i)} \in C_i \text{ と置いて} \\
&= \sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(g_{l'}^{(i)})D(g_a^{-1}).
\end{aligned}$$

同様に $g^{(i)}_{l(m)} \in C_i,\ m = 1, 2, \cdots, h,\ C_i = \{g^{(i)}_{l(1)}, \cdots, g^{(i)}_{l(h)}\}$ に対して

$$\sum_{a=1}^{r} D(g_a g_l^{(i)} g_a^{-1}) = \sum_{a=1}^{r} D(g_a) D(g_a g^{(i)}_{l(m)} g_a^{-1}) D(g_a^{-1}) \quad (m = 1, 2, \cdots, h)$$

であるので，これらを $m$ について加え

$$\begin{aligned} & h \sum_{a=1}^{r} D(g_a g_l^{(i)} g_a^{-1}) \\ = \ & \sum_{a=1}^{r} D(g_a) \sum_{m=1}^{h} D(g_a g^{(i)}_{l(m)} g_a^{-1}) D(g_a^{-1}) \\ = \ & \sum_{a=1}^{r} D(g_a) D(\mathbf{C}_i) D(g_a^{-1}) \\ = \ & D(\mathbf{C}_i) \sum_{a=1}^{r} D(g_a) D(g_a^{-1}) \ ((1) \text{ を使った}) \\ = \ & D(\mathbf{C}_i) \sum_{a=1}^{r} 1 \\ = \ & r D(\mathbf{C}_i), \end{aligned}$$

故に

$$= \sum_{a=1}^{r} D(g_a g_l^{(i)} g_a^{-1}) = \frac{r}{h} D(\mathbf{C}_i).$$

従って，　$g \in C_i$ ならば

$$\sum_{a=1}^{r} D(g_a g g_a^{-1}) = \frac{r}{h} D(\mathbf{C}_i) \quad \cdots (*)$$

ここで次を使った。

$$[D(g_a), D(\mathbf{C}_i)] := D(g_a) D(\mathbf{C}_i) - D(\mathbf{C}_i) D(g_a) = 0,$$

即ち

$$D(g_a) D(\mathbf{C}_i) D(g_a^{-1}) = D(g_a) \sum_{g \in C_i} D(g) D(g_a^{-1}) = \sum_{g \in C_i} D(g_a g g_a^{-1}) =$$

$$= \sum_{g' \in C_i} D(g') = D(\mathbf{C}_i)$$

$$\Longleftrightarrow D(g_a) D(\mathbf{C}_i) = D(\mathbf{C}_i) D(g_a) \quad \cdots (**).$$

次に

$$\begin{aligned} D(\mathbf{C}_i) D(\mathbf{C}_j) &= \sum_{g \in C_i} D(g) \sum_{l \in C_j} D(l) = \sum_{g \in C_i} \sum_{l \in C_j} D(g) D(l) = \\ &= \sum_{g \in C_i} \sum_{l \in C_j} D(gl) =: D(\mathbf{C}_i \mathbf{C}_j) \end{aligned}$$

と (**) を使うと

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j)D(g_a^{-1})\\
&=\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j)D(g_a^{-1})\\
&=\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(\mathbf{C}_i)D(g_a)D(\mathbf{C}_j)D(g_a^{-1})\\
&=\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j)D(g_a)D(g_a^{-1})\\
&=\frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j)\sum_{a=1}^{r}1\\
&=\frac{1}{r}D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j)\sum_{a=1}^{r}1\\
&=D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j),
\end{aligned}
$$

従って

$$
D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j) = \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j)D(g_a^{-1}) \quad \cdots(***)
$$

ここで

$$
\delta_k(g)=\begin{cases} 1, & (g\in C_k)\\ 0, & (g\notin C_k)\end{cases}
$$

を導入して, (***) を変形すると

$$
\begin{aligned}
D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j) &= \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j)D(g_a^{-1})\\
&= \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j} D(gl)D(g_a^{-1})\\
&= \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\sum_{k=1}^{m}\delta_k(gl)D(gl)D(g_a^{-1})\\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\sum_{a=1}^{r} D(g_a)\delta_k(gl)D(gl)D(g_a^{-1})\\
&= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\sum_{a=1}^{r} D(g_a)D(gl)D(g_a^{-1})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\sum_{a=1}^{r}D(g_a g l g_a^{-1})$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{r}{h}D(\mathbf{C}_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{1}{h}D(\mathbf{C}_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{1}{h}\right\}D(\mathbf{C}_k)$$

従って

$$D(\mathbf{C}_i)D(\mathbf{C}_j) = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^k D(\mathbf{C}_k) \quad with\ c_{ij}^k := \sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{1}{h}\ \square$$

**(3) の $c_{ij}^k$ と定理の $c_{ij}^k$ が等しい事の証明**

(*) と同様，$g \in C_k$ ならば

$$\sum_{a=1}^{r} g_a g g_a^{-1} = \frac{r}{h}\mathbf{C}_k$$

が成り立つ事を仮定する。(1) を使って

$$\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j = \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} g_a(\mathbf{C}_i\mathbf{C}_j)g_a^{-1} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{a=1}^{r} g_a\left(\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j} gl\right)g_a^{-1} = \frac{1}{r}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\sum_{a=1}^{r} g_a g l g_a^{-1} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\sum_{a=1}^{r} g_a\sum_{k=1}^{m}\delta_k(gl) g l g_a^{-1} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\sum_{a=1}^{r} g_a\delta_k(gl) g l g_a^{-1} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\sum_{a=1}^{r} g_a g l g_a^{-1} =$$
$$= \frac{1}{r}\sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{r}{h}\mathbf{C}_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{g\in C_i}\sum_{l\in C_j}\delta_k(gl)\frac{1}{h}\mathbf{C}_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left\{ \sum_{g \in C_i} \sum_{l \in C_j} \delta_k(gl) \frac{1}{h} \right\} \mathrm{C}_k = \sum_{k=1}^{m} c_{ij}^{k} \mathrm{C}_k$$

となり，(3) の $c_{ij}^k$ と定理の $c_{i,j}^k$ は等しい。□

## 参考文献

[1] 吉川圭二 Kikkawa,K.:『群と表現』岩波書店，1996. *Groups and their Representations* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1996.

(received 31 January 2020.)