相対素イデアルに関する或る定理の証明
A Proof of a Theorem on Relative Prime Ideals

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

In this short paper, we give a proof of a theorem on relative prime ideals in algebraic number theory.

Key words ; prime ideal.
Mathematics Subject Classification 2010;　11R04.

K を m 次代数体 ($[K:\mathbf{Q}]=m$, $\mathbf{Q}$ は有理数体である。)，O_K を K の整数環とする。p を (有理) 素数とする。K の単項イデアル $(p)=pO_K$ の K での素イデアル分解を

$$(p)=pO_K=\prod_{\mathbf{p}}\mathbf{p}^{e_p(\mathbf{p})},\quad (\mathbf{p}\text{ は }K\text{ の素イデアル，}e_p(\mathbf{p})\in\mathbf{N})$$

とする。

又，L を K の相対 n 次拡大体 ($[L:K]=n$), O_L を L の整数環として，$\mathbf{p}$ を K での素イデアル，L の単項イデアル $(\mathbf{p})=\mathbf{p}O_L$ の L での素イデアル分解を

$$(\mathbf{p})=\mathbf{p}O_L=\prod_{\mathbf{P}}\mathbf{P}^{e_{\mathbf{p}}(\mathbf{P})},\quad (\mathbf{P}\text{ は }L\text{ の素イデアル，}e_{\mathbf{p}}(\mathbf{P})\in\mathbf{N})$$

とする。このとき，次の事実 (次の定理 1) が良く使われるが，その明確な証明を，知っている限り見た事がないので，その証明をここに書くのも価値がない事ではないと考えられる。

定理 1

$$(1)\quad (p) = pO_K = \prod_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^{e_p(\mathbf{p})} \ \Rightarrow\ \mathbf{p}\cap\mathbf{Z} = (p) = p\mathbf{Z}$$

$$(2)\quad (\mathbf{p}) = \mathbf{p}O_L = \prod_{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{e_\mathbf{p}(\mathbf{P})} \ \Rightarrow\ \mathbf{P}\cap O_K = (\mathbf{p}) = \mathbf{p}O_K = \mathbf{p}$$

証明

(1)

$$(p) = pO_K = \prod_{\mathbf{p}} \mathbf{p}^{e_p(\mathbf{p})} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{p}|pO_K \ \Leftrightarrow\ pO_K \subset \mathbf{p}$$

この両辺の $\cap\mathbf{Z}$ を取ると

$$p\mathbf{Z} = pO_K \cap \mathbf{Z} \subset \mathbf{p}\cap\mathbf{Z}$$

$\mathbf{p}\cap\mathbf{Z}$ はイデアルであり $\mathbf{p}\cap\mathbf{Z}\subset\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Z}$ のイデアルは単項イデアルに限る事により

$$p\cap\mathbf{Z} = (n) \text{ for some } n\in\mathbf{N}$$

従って

$$(p) = p\mathbf{Z} = pO_K\cap\mathbf{Z} \subset \mathbf{p}\cap\mathbf{Z} = (n) \ \Rightarrow\ (p)\subset(n)$$

となるが，p は素数であるから $n = p$, 即ち

$$\mathbf{p}\cap\mathbf{Z} = (n) = (p) = p\mathbf{Z}$$

(2)

$$(\mathbf{p}) = \mathbf{p}O_L = \prod_{\mathbf{P}} \mathbf{P}^{e_\mathbf{p}(\mathbf{P})} \ \Leftrightarrow\ \mathbf{P}|\mathbf{p}O_L \ \Leftrightarrow\ \mathbf{p}O_L \subset \mathbf{P}$$

この両辺に $\cap O_K$ を施すと

$$\mathbf{p}O_K = \mathbf{p}O_L\cap O_K \subset \mathbf{P}\cap O_K (\neq O_K)$$

代数体の素イデアルは極大イデアルであることと，$\mathbf{p}O_K = \mathbf{p}$ が K の素イデアルであること，$\mathbf{P}\cap O_K$ は K のイデアルであることにより

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}O_K = \mathbf{P}\cap O_K$$

□

参考文献

[1] 藤崎源二郎 Fujisaki,G. 森田康夫 Morita,Y. 山本芳彦 Yamamoto,Y:『数論への入門』, 日本評論社, 1980. *Introduction to Number Theory* (in Japanese), Nihon-Hyouron-sha, Tokyo, 1980, p.72.

[2] Neukirch,J.: *Analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. (邦訳：梅垣敦紀 訳『代数的整数論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003, p.48.)

[3] 山本芳彦 Yamamoto,Y.:『数論入門 2』岩波書店, 1996. *Introduction to Number Theory 2* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1996, p.210.

(received 22 November 2019.)