Heckeの量指標を持つL-関数の非自明な零点
Non-Trivial Zeros of Hecke's L-Functions with Grössencharakter

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We study here non-trivial zeros of Hecke's L-functions with Grössencharakter.

Key words ; Hecke's L-function, Grössencharakter.
Mathematics Subject Classification 2010; 11S40.

K を $\mathbf{Q}$(有理数体) 上 n 次の代数体 ($n = [K : \mathbf{Q}]$), $O := O_K$ を K の整数環とする。K の (分数) イデアル全体のなす群を I と表わし，P を単項 (分数) イデアル全体のなす群とする。I/P は K のイデアル類群で $h := \sharp(I/P)$ は K の類数である。

整イデアル $\mathbf{n}$ のノルムを $N(\mathbf{n}) := \sharp(O/\mathbf{n})$ で定義し，分数イデアル $\alpha = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}$,（$\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は整イデアル）のノルムを $N(\alpha) = \frac{N(\mathbf{a})}{N(\mathbf{b})}$ と定義する。素イ

デアル全体の集合を $Prim_K$ で表わす。

以下は主に [3] [18] [40] に従う。K の素イデアルを有限素点とも云い K の r_1 個の実共役体，$2r_2$ 個の共役体に対応する相異なる同型写像は $\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_\mu, \cdots, \tau_n$ である。$K_\mu := K^{\tau_\mu}$，$a_\mu := a^{\tau_\mu}$ と置き

$$a_\mu = a^{\tau_\mu} \in \mathbf{R},\ K_\mu \subset \mathbf{R}\ (1 \leq \mu \leq r_1)\ (a^{\tau_\mu}: \text{実　と云う}),$$
$$a_\mu = a^{\tau_\mu} \notin \mathbf{R},\ K_\mu \not\subset \mathbf{R}\ (r_1 \leq \mu) \qquad (a^{\tau_\mu}: \text{虚　と云う}),$$
$$a_\mu = \overline{a_{r_2+\mu}}\ (r_1 + 1 \leq \mu \leq r_1 + r_2)$$

と番号付けをしておく。

$\mathbf{m}$ を整イデアルとして

$$I(\mathbf{m}) := \{\mathbf{a} \in I \mid (\mathbf{a}, \mathbf{m}) = 1\},\ (\mathbf{a} \text{ と } \mathbf{m} \text{ は無縁} \mathit{insignificance})$$
$$P(\mathbf{m}) := \{(a) \in P \mid a \equiv 1 \bmod^{\times} \mathbf{m}\ \}$$

$\mathrm{mod}^{\times}$ は乗法的合同である。

と置き，群 $I(\mathbf{m})$ の指標 character:

$$\chi : I(\mathbf{m}) \to \{\ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\ \}$$

が

$$\chi((a)) = \prod_{\mu=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{a_\mu}{|a_\mu|}\right)^{u_\mu} |a_\mu|^{iv_\mu} \cdots (\odot)$$

where

$$u_\mu \in \begin{cases} \{0, 1\} & . \quad (a^{\tau_\mu}: \text{実}) \\ \quad \mathbf{Z} & . \quad (a^{\tau_\mu}: \text{虚}) \end{cases}$$

$$\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} v_\mu = 0\ (v_\mu \in \mathbf{R})\ \ u_\mu, v_\mu \text{は} \chi \text{に付随する}.$$

を満たすとき，mod $\mathbf{m}$ の Hecke の量指標 Grössencharakter という。

$$M := \{\mathbf{n} \mid \mathbf{n} \text{ は整イデアル}, (\odot)\ \mathit{holds\ for}\ {}^{\exists}(a) \in P(\mathbf{n}) \cap I(\mathbf{m})\}$$

M の元であるイデアルの最大公約イデアルを上記 χ の導手 conductor と云って $\mathbf{m}^*$ で表わす。$\mathbf{m} = \mathbf{m}^*$ である指標 χ^* を原始指標 primitive character と云う。$\mathbf{n} \notin I(\mathbf{m})$ のときには $\chi(\mathbf{n}) = 0$ と定義する。

Hecke の原始量指標 primitive Grössencharakter:χ を持つ L-関数を次で定義する：

$$L_K(s, \chi) := \sum_{(1) | \mathbf{n} \in I} \frac{\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s},\ \ \Re s > 1\ \ (s \in \mathbf{C},\ (1) = O_K\ ).$$

上記 $L_K(s,\chi)$, χ mod $\mathbf{m}$: primitive non-trivial は次の性質を持つ。
(i) 上記 $L_K(s,\chi)$ の右辺は $\Re s>1$ で絶対収束する。又この範囲で Euler 積：

$$\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I}\frac{\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s}=\prod_{\mathbf{p}\in Prim_K}\frac{1}{1-\chi(\mathbf{n})N(\mathbf{p})^{-s}},\quad \Re s>1$$

を持つので，この範囲には零点，極を持たず，$\sigma>1$ で有界である。
(ii) $L_K(s,\chi)$ は $\mathbf{C}$ 全体に解析接続され，整関数となる。
(iii)

$$\Theta_K(s,\chi):=A(\mathbf{m})^s\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)L_K(s,\chi)$$

$$where\ A(\mathbf{m}):=2^{-r_2}\pi^{-\frac{n}{2}}\sqrt{|d_K|N(\mathbf{m})},\ d_K \text{は} K \text{の判別式},$$

$$n_\mu:=\begin{cases}1 & ,\quad (a^{\tau_\mu}:\text{実})\\ 2 & ,\quad (a^{\tau_\mu}:\text{虚})\end{cases}$$

.

と置くと関数等式 funtional equation:

$$\Theta_K(s,\chi)=T(\chi)\Theta_K(1-s,\overline{\chi})$$

$$where\ T(\chi)\ depends\ on\ \chi\ with\ |T(\chi)|=1$$

(iv) s 平面の任意の帯状領域 $\sigma_1\le\sigma\le\sigma_2$ で $\Theta_K(s,\chi)$ は有界 bounded
(v) 整関数の位数：$\mathrm{ord}[\Theta_K(s,\chi)]=1$ である。これは $\mathrm{ord}[\Gamma(s)]=1$, $L_K(s,\chi)$ $(\sigma>1)$: 有界と関数等式 (iii) による。
を満たす。
$\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)$ の極より由来する $L_K(s,\chi)$ の零点を自明な零点 trivial zeros と云う。$s=0$ を除いて $\Re s=0,1$ には零点が存在しない事が知られている ([17]p.51-56,Th.3.3.1-3.3.3)。

次の定理を証明する：

主定理 1　$m\in\mathbf{Z}$ を一つ固定し，$C_m=m$ (or $m+\frac{1}{2}$) とする。また，以下の σ も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。$\frac{1}{2}<\sigma<1$, $\nu\gg1$ は十分大きい自然数とする。又，$C_{m-1}<t<C_m$ とする。

$L_K(s,\chi)$ の非自明な零点 *non-trivial zero*: $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$ ($\gamma_0=0$ も含める *including*) を,

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho=\beta+i\gamma,\ L_K(\rho,\chi)=0,\ C_{m-1}<\gamma<C_m\}$$

で定義する。従って，領域 $\{w=u+iv \mid \beta_0<u,\ C_{m-1}<v<C_m\}$ は非零領域 *zero free region* となる。
ρ_+, ρ_-, $\beta_+>\frac{1}{2}$, $\beta_->\frac{1}{2}$, γ_+, γ_-, U_m^+, U_m^-, U_m, V_m^+, $V_m^->0$
を次で定義する。

$$\begin{aligned}
\rho_+ &= \beta_++i\gamma_+,\ L_K(\rho_+,\chi)=0\\
&\quad \gamma_+ := \min\{\ \gamma \mid \rho=\beta+i\gamma,\ \beta>\frac{1}{2},\ L_K(\rho,\chi)=0,\ \gamma_0<\gamma\}\\
\rho_- &= \beta_-+i\gamma_-,\ L_K(\rho_-,\chi)=0\\
&\quad \gamma_- := \max\{\ \gamma \mid \rho=\beta+i\gamma,\ \beta>\frac{1}{2},\ L_K(\rho,\chi)=0,\ \gamma<\gamma_0\}\\
U_m^+ &:= \min\{\gamma_0+\frac{1}{2}(\gamma_+-\gamma_0),\ C_m\}\\
U_m^- &:= \max\{\gamma_0-\frac{1}{2}(\gamma_0-\gamma_-),\ C_{m-1}\}\\
U_m &:= \frac{1}{2}\min\{|U_m^+-\gamma_0|,\ |U_m^--\gamma_0|,\ 1\ \}\\
V_m^+ &:= \gamma_0+U_m\\
V_m^- &:= \gamma_0-U_m
\end{aligned}$$

ρ_0 の左側：$\Im\rho=\gamma_0$, $L_K(\rho,\chi)=0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1+i\gamma_0,\ \rho_2 := \beta_2+i\gamma_0,\cdots$$

$$(\frac{1}{2}<\cdots<\beta_2<\beta_1<\beta_0,\ L_K(\rho_i,\chi)=0,\ \Im\rho_i=\gamma_0,\ i=1,2,\cdots)$$

とする (ρ_1, $\rho_2,\cdots$ が存在しない場合もある。このときは $\beta_1=\frac{1}{2}$ とする。)。
注 $\{w=u+iv \mid \frac{1}{2}<u,\ U_{m-1}^-\leq v\leq U_m^+,\ v\neq\gamma_0\}$ は非零領域 *zero free region* である。
σ, $s=\sigma+it$, $h:=\frac{1}{\nu^2}(\sigma-\beta_0)$, t, $Y>1$, $\delta>1$ を

$$0<\sigma-\beta_0 \ll \min\left\{\frac{\sigma-\frac{1}{2}}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})},\ \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}\right\}$$

$\cdots(*)$

$\gamma_0 - h \leq t \leq \gamma_0 + h$

(これより，

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu^4}}(\sigma-\beta_0)} \leq \frac{1}{|s-\rho_0|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2}} \leq \frac{1}{\sigma-\beta_0},$$

$$s-\rho_0 = (\sigma-\beta_0)+i(t-\gamma_0) = (\sigma-\beta_0)(1+iO(\frac{1}{\nu^2}))\ ),$$

$$\frac{|\rho-s|}{|\rho_0-s|} > 2 \quad (\rho \neq \rho_0) \ \ for \ \ \forall\rho = \beta+i\gamma, \quad \frac{|1-s|}{|\rho_0-s|} > 2$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta_K(\rho)$ の非自明な零点 non-trivial zero)
となるように選ぶ (これは明らかに可能である。) と，

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0} \leq \max\left\{Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}},\ Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right\}$$

となる。
従って，この結論は定理の仮定 $(*)$ と矛盾し，ρ_0 は，もはや $L_K(s,\chi)$ の非自明な零点 non-trivial zero ではあり得ない。

主定理 1 を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 (Hölder の不等式の系)
$\nu > 1$, $H > 0$, $[A,\ A+H]$ で可積分な関数 $f(t)$ に対して，

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^{1/\nu}dt \leq \left[\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^2 dt\right]^{1/(2\nu)},$$

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^{1/(2\nu)}dt \leq \left[\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)| dt\right]^{1/(2\nu)}$$

が成立する。

証明
$(1/2\nu)+(1/\mu) = 1$ となる μ をえらぶ。Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} &\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^{1/\nu}dt \\ \leq\ &\frac{1}{H}\left\{\int_A^{A+H} |f(t)|^{(1/\nu)\cdot 2\nu}dt\right\}^{1/2\nu}\left\{\int_A^{A+H} 1^\mu dt\right\}^{1/\mu} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^2 dt\right\}^{1/2\nu} H^{1/\mu}$$
$$= \left\{\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^2 dt\right\}^{1/2\nu}$$

を得る。後半については同様にして

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^{1/(2\nu)}dt$$
$$\leq \frac{1}{H}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^{(1/(2\nu))\cdot 2\nu}dt\right\}^{1/2\nu}\left\{\int_A^{A+H}1^{\mu}dt\right\}^{1/\mu}$$
$$= \frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|dt\right\}^{1/2\nu} H^{1/\mu}$$
$$= \left\{\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|dt\right\}^{1/2\nu}$$

□

補題 2　$\sigma > 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots$ とする。
$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}$$

$m = 1, 2, \cdots$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} < m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}$$
$$\ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} \quad (\text{as } m \to \infty\ )$$

が成立する。即ち

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} \ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}\quad for\ \sigma > 1,\ m = 0, 1, 2, \cdots.$$

証明 先ず $m = 1, 2, \cdots$ のときを考える。
$f(y) := y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y) = y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m - \sigma\log y\}$ であ

るから，$f'(y_0)=0$ となるのは，$y_0=\exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\sum_{n=[y_0]+1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma}\\
&< \int_2^{[y_0]}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\int_{[y_0]}^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx\\
&< \int_1^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}\\
&\le m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma}\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m\\
&\le m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+m!\frac{1}{e}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^m\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m}\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}
\end{aligned}$$

但し，$[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又，

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m\le\frac{m!}{e}$$

を使った。
$m=0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\sigma}dx=1+\frac{1}{\sigma-1}$$

となり，補題は証明された。□

補題 3 (Montgomery-Vaughan の定理，[45] の 2nd ed.)
$a_n\in\mathbf{C}$, $A\in\mathbf{R}$, $H>0$, $Y>1$, $\sigma>\frac{1}{2}$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\int_A^{A+H}|\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\sigma-it}|^2dt &= H\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^{-2\sigma}+\mathrm{O}(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^{1-2\sigma})\\
\int_A^{A+H}|\sum_{n\le Y}a_n n^{-\sigma-it}|^2dt &= H\sum_{n\le Y}|a_n|^2n^{-2\sigma}+\mathrm{O}(Y\sum_{n\le Y}|a_n|^2n^{-2\sigma})
\end{aligned}$$

が成立する。ここに，最初の式 *the first equation above* に於ける

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it},\quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1-2\sigma}$$

は収束すると仮定し，O は絶対定数を持つ Bachmann-Landau のラージ・オウ記号 [34] である。

補題 4　$a_i,\ c_i = c_i(\nu) \in \mathbf{C}$，$f_i(\nu) \to 0\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 0, 1, \cdots, n)$ とする。又，$|a_0| > |a_i|\ (i = 1, 2, \cdots, n)$，$|c_i|^{1/\nu} \to 1\ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)\ as\ \nu \to \infty$，$c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu\to\infty} |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^{\nu} a_i^{\nu}|^{1/\nu} = \max_{0\leq i\leq n} |a_i| = |a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\cdots,n} |a_i/a_0| = 1/r\ (r > 1)$ とおく。

$$\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)} \to 1,\ |c_i|^{1/\nu} \to 1\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

また，n が有限 finite であるので，$\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\nu_0$ が存在して，

$$\left|\frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right| < 1+\epsilon\quad (i = 1, 2, \cdots, n)\ for\ \forall\nu > \nu_0$$

となるが，ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1+\epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned}
& |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1+f_i(\nu))^{\nu} a_i^{\nu}|^{1/\nu} \\
= \quad & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{c_0}\left(\frac{1+f_i(\nu)}{1+f_0(\nu)}\right)^{\nu}\left(\frac{a_i}{a_0}\right)^{\nu}\right|^{1/\nu} \\
= \quad & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\sum_{i=1}^{n}\mathrm{O}\left(\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^{\nu}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \quad & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \quad & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1+f_0(\nu)|\left|\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right\}^{R^{\nu}\cdot\frac{1}{\nu R^{\nu}}}\right| \\
\to \quad & |a_0|\quad (as\ \nu \to \infty)
\end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 5　[1], [2], [12], [13], [16], [34], [42], [43]

$$(1)\quad \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s} s \prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)e^{-\frac{s}{n}}$$

$$(2)\quad \log\Gamma(s+1) = -[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty}\{\log(1-\frac{s}{(-n)}) + \frac{s}{(-n)}\}]$$

$$\begin{aligned}(3)\quad &\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) =: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s}\\ &= -[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{s-(-n)} + \frac{1}{(-n)}\}]\\ &= \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + \mathrm{O}(\frac{1}{|s+1|^2})\\ &= \frac{d}{ds}\log s + \frac{d}{ds}\log\Gamma(s)\\ &= \frac{1}{s} + \log s - \frac{1}{2s} + \mathrm{O}(\frac{1}{|s|^2})\\ &= \log s + \frac{1}{2s} + \mathrm{O}(\frac{1}{|s|^2})\end{aligned}$$

但し，γ_0 は Euler の定数である。

補題 6　[3] [17] [18] [40]
(i)

$$\begin{aligned}&\Theta_K(s,\chi) := A(\mathbf{m})^s \prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)L_K(s,\chi)\\ &= e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},\\ &L_K(s,\chi) = \frac{A(\mathbf{m})^{-s}}{\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)}e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}\end{aligned}$$

(ii) 上記積に現れる零点 *zeros:*ρ は無限個 *infinitely many* ある。

証明　(i)$L_K(1,\chi) \neq 0$ より $\Theta_K(1,\chi) \neq 0$。これより関数等式を使って $\Theta_K(0,\chi) \neq 0$ となる。整関数 $\Theta_K(1,\chi)$ の位数が1であることと，$\Theta_K(0,\chi) \neq 0$ から，Weierstrass-Hadamard の因数分解定理 [42], [46] を適用し

$$\Theta_K(s,\chi) = e^{A+Bs} \prod_{0<\Re\rho<1} \left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

となる。

(ii) 証明省略.

これで補題は証明された。□

補題 7 (i)

$$\begin{aligned}
-\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi) &= \{\log A(\mathrm{m}) - B\} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} n_\mu \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right) - \\
&-\sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \{\log A(\mathrm{m}) - B\} + \\
&-\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} n_\mu \left(\frac{1}{\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}} + \gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right) - \\
&\qquad -\sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \{\log A(\mathrm{m}) - B\} + \\
&-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} n_\mu \left(\frac{1}{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|} + \frac{\gamma_0}{2} + \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|-(-2n)}+\frac{1}{(-2n)}\right\}\right) - \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \{\log A(\mathrm{m}) - B\} + \\
&-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{1}{(s+iv_\mu)+\frac{|u_\mu|}{n_\mu}} + \frac{\gamma_0 n_\mu}{2} + \right. \\
&\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(s+iv_\mu)+\frac{|u_\mu|-(-2n)}{n_\mu}}+\frac{n_\mu}{(-2n)}\right\}\right) - \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\},
\end{aligned}$$

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} =$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\left(\frac{1}{\{(s+iv_\mu)+\frac{|u_\mu|}{n_\mu}\}^{\nu+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{(s+iv_\mu)+\frac{|u_\mu|-(-2n)}{n_\mu}}\right\}^{\nu+1}\right)-$$
$$-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N}).$$

(ii)

$$-\frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)=\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I}\frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s}\quad(\Re s>1)$$
$$where\ \Lambda(\mathbf{n}):=\begin{cases}\log N(\mathbf{p}), & (\mathbf{n}=\mathbf{p}^m,{}^\exists\mathbf{p};prime\ ideal,{}^\exists m\in\mathbf{N})\\ 0, & (\text{その他のとき})\end{cases}$$

証明 (i) 補題6(i)の

$$L_K(s,\chi)=\frac{A(\mathbf{m})^{-s}}{\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)}e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

を対数微分 logarithmic derivative して補題5(3)を代入すれば良い。最後の式は更にν回微分すれば良い。

(ii) $L_K(s,\chi)$のEuler積：

$$L_K(s,\chi)=\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I}\frac{\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s}=\prod_{\mathbf{p}\in Prim_K}\frac{1}{1-\chi(\mathbf{p})N(\mathbf{p})^{-s}},\quad\Re s>1$$

を対数微分 logarithmic derivativeすると ($\Re s>1$)

$$-\frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)=\sum_{\mathbf{p}\in Prim_K}\frac{\chi(\mathbf{p})N(\mathbf{p})^{-s}\log N(\mathbf{p})}{1-\chi(\mathbf{p})N(\mathbf{p})^{-s}}=$$
$$=\sum_{\mathbf{p}\in Prim_K}\log N(\mathbf{p})\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\chi(\mathbf{p})^m}{N(\mathbf{p})^{ms}}$$
$$=\sum_{\mathbf{p}\in Prim_K,m\in\mathbf{N}}\frac{\log N(\mathbf{p})\chi(\mathbf{p}^m)}{N(\mathbf{p}^m)^s}$$
$$=\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I}\frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s}.$$

これで補題の証明は完了した。□

補題 8　$N_K(T,\chi) := \sharp\{\rho \in \mathbf{C} \mid 0 < \Re\rho < 1, 0 \leq \Im\rho \leq T, L_K(\rho,\chi) = 0\}$ と定義すると

$$N_K(T+1,\chi) - N_K(T,\chi) \ll \log T.$$

証明 補題 7(i) に補題 5(2) を使って

$$-\frac{L_K'}{L_K}(s,\chi) = \{\log A(\mathbf{m}) - B\} + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} n_\mu \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right) -$$
$$-\sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$= O(\log t) - \sum_\rho \left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$

となるが，ここで $s = 2+iT$ を代入して

$$-\frac{L_K'}{L_K}(2+iT,\chi) = \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^{2+iT}}$$
$$= \sum_{\mathbf{p}\in Prim_K} \log N(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathbf{p}^m)}{N(\mathbf{p})^{m(2+iT)}}$$

($N(\mathbf{p}) = p^f$, $\mathbf{p}|(p)$, $f \in \mathbf{N}$ は $\mathbf{p}$ の (絶対) 次数, $^\exists p$ は有理素数で
$q \neq p$ なる有理素数 q に対して, 素イデアル $\mathbf{q}$ が $\mathbf{q}|(q)$ ならば $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$)

$$= \sum_{p:\text{有理素数}} \sum_{\mathbf{p}|(p),\mathbf{p}\in Prim_K} \log p^f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p^f)^{m(2+iT)}}$$

((p) の素イデアル分解を $(p) = \mathbf{p}_1{}^{e_1}\cdots\mathbf{p}_k{}^{e_k}$ とすると,
$p^n = N((p)) = N(\mathbf{p}_1)^{e_1}\cdots N(\mathbf{p}_k)^{e_k} = (p^{f_1})^{e_1}\cdots(p^{f_k})^{e_k}$ より
$e_1 f_1 + \cdots + e_k f_k = n$ となるので $1 \leq e_i, f_i, k \leq n,\ i = 1,2,\cdots k$.)

$$= \sum_{p:\text{有理素数}} \sum_{i=1}^{k} \log p^{f_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{O(1)}{(p^{f_i})^{m(2+iT)}}$$
$$\ll \sum_{p:\text{有理素数}} kn \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p)^{2m}}$$
$$\ll n^2 \sum_{p:\text{有理素数},\ m\in\mathbf{N}} \frac{\log p}{(p^m)^2}$$
$$= n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{l^2} \ll 1,$$

$$where\ \Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & (n = p^m, {}^{\exists} p; rational\ prime, {}^{\exists} m \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

は *von Mangoldt* 関数である。

を使うと

$$\mathrm{O}(\log T) + \frac{L_K'}{L_K}(2+iT,\chi) = \sum_\rho \left\{ \frac{1}{2+iT-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\mathrm{O}(\log T) + \mathrm{O}(1) = \sum_\rho \left\{ \frac{1}{2+iT-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} \mathrm{O}(\log T) &= \sum_\rho \Re \left\{ \frac{1}{2+iT-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\ &= \sum_\rho \left\{ \frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2} \right\} \\ &> \sum_\rho \frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2} > \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2} \end{aligned}$$

$$> \sum_{T<\gamma\le T+1} \frac{1}{2^2+1^2} = \frac{1}{5} \sum_{T<\gamma\le T+1} 1 = \frac{1}{5}\{N_K(T+1,\chi) - N_K(T,\chi)\}$$

これで証明は完了した。□

補題 9 ([34] 補題 6.9 系の一般化)
$\sigma > \frac{1}{2}$, $s \neq \rho, -n, 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ として,

$$\begin{aligned} &\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} \\ &= -\sum_{|t-\gamma|\le 1} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log(2+|t|)\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) \end{aligned}$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

証明 補題 7(i) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} =$$

$$= -\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2} \left(\frac{1}{\{(s+iv_\mu) + \frac{|u_\mu|}{n_\mu}\}^{\nu+1}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(s+iv_\mu) + \frac{|u_\mu|-(-2n)}{n_\mu}} \right\}^{\nu+1} \right) -$$

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\\
&=\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}O\left(\frac{1}{\sigma^{\nu+1}}\right)+\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\sum_{n=1}^{\infty}O\left\{\frac{1}{|s+n|^{\nu+1}}\right\}-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\\
&=O\left(\frac{1}{\sigma^{\nu+1}}\right)+O\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s+n|^{\nu+1}}\right\}-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N})
\end{aligned}
$$

上記右辺第2項は，$\sigma>\frac{1}{2}$であるから，$|s+n|^{-\nu-1}$はnについて単調減少である。従って

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|s+n|^{\nu+1}}\ll\\
\ll\;&\int_0^{\infty}\frac{dy}{|s+y|^{\nu+1}}\\
=\;&\int_0^{\infty}\frac{dy}{(\sigma^2+2y\sigma+y^2+t^2)^{(\nu+1)/2}}\\
=\;&\int_0^{\infty}\frac{dy}{\{(\sigma+y)^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}}\\
=\;&\int_{\sigma}^{\infty}\frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}}\\
=\;&\left[\int_{\sigma}^{|s|}\frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}}+\right.\\
&\left.+\int_{|s|}^{\infty}\frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}}\right]\\
<\;&\left[\int_{\sigma}^{|s|}\frac{dx}{(|s|^2)^{(\nu+1)/2}}+\int_{|s|}^{\infty}\frac{dx}{(x^2)^{(\nu+1)/2}}\right]\\
=\;&\left[\frac{1}{|s|^{\nu+1}}\{|s|-\sigma\}+\frac{1}{\nu}\frac{1}{|s|^{\nu}}\right]\\
\ll\;&\frac{1}{|s|^{\nu}}\\
\ll\;&\frac{1}{\sigma^{\nu}}\quad for\ \sigma>\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

第3項については，これを2つの和に分ける：

$$
\sum_{\rho}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}=\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}+\sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}
$$

この第 2 項を評価する:

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\right| \le \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}} \\
= \ & \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
= \ & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n<|t-\gamma|\le n+1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
< \ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \sum_{n<|t-\gamma|\le n+1} 1 \\
= \ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n<\gamma-t\le n+1} 1 + \sum_{-n-1\le\gamma-t<-n} 1 \right) \\
= \ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n+t<\gamma\le n+1+t} 1 + \sum_{-n-1+t\le\gamma<-n+t} 1 \right) \\
\ll \ & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) \\
< \ & \sum_{n\le|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n
\end{aligned}
$$

ここで，補題 8 を使った。次に $|t| \le 1$ と $|t| > 1$ の二つの場合に分ける。

$|t| \le 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) \ &\ll \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log n \\
&\ll \ 1.
\end{aligned}
$$

$|t| > 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) < \sum_{n\le|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n \ll \\
&\ll \log 2|t| + \log 2 \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} + \sum_{n>|t|} \frac{\log n}{n^{\nu+1}} \\
&\ll \log 2|t| + \log 2 \int_{|t|}^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu+1}} + \int_{|t|}^{\infty} \frac{\log x dx}{x^{\nu+1}} \\
&= \log 2|t| + \frac{\log 2}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{\log|t|}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{1}{\nu^2|t|^{\nu}} \\
&\ll \log 2(|t|+2) \quad (\text{as } \nu \to \infty).
\end{aligned}
$$

$|t| \leq 1$ と $|t| > 1$，いずれの場合も

$$\left| \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \right| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|)$$
$$\ll \log 2(|t|+2) \quad (\text{as } \nu \to \infty).$$

以上より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} =$$
$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right) - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$
$$= - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right)$$
$$= - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log 2(|t|+2)) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right)$$

となり，補題は証明された。□

補題 10　$s = \sigma + it$，$\frac{1}{2} < \sigma < 1$ を $\zeta_K(s)$ の正則点として，s に一番近い $\zeta_K(s)$ の非自明な零点は1つとして，それを $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$，$\beta_0 < \sigma$ とする ($|s-\rho| > |s-\rho_0|$)。そして $|s-\rho_0| < |s-(-n)|$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$，$|s-\rho_0| < \sigma \leq |s|$，$|s-\rho_0| \ll 1$ とする。このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} = -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

証明　補題9，$|s-\rho_0| < \sigma$，$|s-\rho_0| < |s-(-n)|$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} =$$
$$= - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right) + \mathrm{O}\left\{\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right\}$$
$$= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left\{\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right\} -$$
$$- \sum_{\rho;\rho\neq\rho_0, |t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)$$

$$= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left\{\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{\sigma^\nu}\right\} -$$
$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\leq 1} \frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)$$
$$= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(1) -$$
$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\leq 1} o(1) + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)$$
$$= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} -$$
$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)$$

(補題 8 を使った。)

$$= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) +$$
$$+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \mathrm{O}\left((s-\rho_0)^{\nu+1} \log 2(|t|+2)\right)$$
$$= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} -$$
$$-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o\left(\log 2(|t|+2)\right)$$
$$= -\frac{1+o(\log 2(|t|+2))}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$
$$= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \quad as\ \nu \to \infty \quad \square$$

補題 11　[13], [16], [34], [42]
$c>0,\ Y>0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Y^w}{w^2} dw = \begin{cases} \log Y, & (1 \leq Y) \\ 0, & (0 < Y \leq 1) \end{cases}$$

補題 12　([37] の改変)
$c>0,\ X, Y > 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{X^w(Y^w-1)}{n^{\frac{w}{\nu}} w^2 \log Y} dw = \begin{cases} 1 & , \quad (n \leq X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y} \log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right) \leq 1, & (X^\nu \leq n \leq (XY)^\nu) \\ 0 & , \quad ((XY)^\nu \leq n) \end{cases}$$

証明　補題 11 を使えば良い。□

補題 13
実数上有界な台 $[B, C]$ を持つ複素数値関数 $f(v) = f_1(v)+if_2(v)$，$(f_1(v) := \Re f(v)$，$f_2(v) := \Im f(v))$ の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivx)dv \quad \cdots(a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z = x + iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv \quad \cdots(b)$$

は $z = x + iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。
注　この補題は、ある意味，弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明　複素解析的ならば実解析的であるから，後者を証明すれば良い。

$$F(z) = F(x+iy) = F_1(z) + iF_2(z) = F_1(x+iy) + iF_2(x+iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$，$F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv = \int_B^C f(v)\exp(ivz)dv,$$

$$f(v)\exp(ivz) = \{f_1(v) + if_2(v)\}\exp[iv(x+iy)] =$$

$$= \{f_1(v) + if_2(v)\}e^{-vy}\{\cos(vx) + i\sin(vx)\}$$

$$= \{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy} + i\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}$$

であり，この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている). これより

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

補題 14 [35]
$m \in \mathbf{N}$ として, $N(\mathbf{n}) = m$ となる整イデアル $\mathbf{n}$ の個数を $F(m)$ で表わすと

$$F(m) := \sharp\{\mathbf{n} \ : \ \mathbf{n} \in I_K,\ N(\mathbf{n}) = m\ \} \le d_n(m) \ll_\epsilon m^\epsilon$$
$$\textit{for any small } \epsilon > 0.$$

ここで

$$d_n(m) := \sum_{m_1 \cdots m_n = m} 1.$$

注

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}\right)^n =: \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_n(l)}{l^s},\ \Re s > 1.$$

$d_n(m)$ は一般約数関数である。

補題 15

(i)

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L_K'}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{ds^\nu}\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I}\frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} =$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\log m)^\nu}{m^s}G(m),\ \Re s > 1,\ \nu = 0, 1, 2, \cdots$$
$$\textit{where } G(m) := \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I,\ N(\mathbf{n})=m}\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n}),$$

(ii)

$$G(m) = \begin{cases} \ll n\log m, & (m = p^e,\ p \text{ は有理素数},\ e \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

証明 (i)

$$-\frac{L_K'}{L_K}(s,\chi) = \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I,\ N(\mathbf{n})=m} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{m^s}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I,\ N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} G(m)$$

この両辺を ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 回微分すれば良い。

(ii)

$$G(m) = \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I,\ N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})$$
$$\ll \sum_{\mathbf{p}\text{ は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ N(\mathbf{p}^l)=m} \log N(\mathbf{p})$$
$$= \sum_{\mathbf{p}\text{ は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ N(\mathbf{p})^l=m} \log N(\mathbf{p})$$
$$= \sum_{\mathbf{p}\text{ は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ (p^f)^l=m} \log N(\mathbf{p}),\ (f\text{ は }\mathbf{p}\text{ の (絶対) 次数})$$
$$= \sum_{\mathbf{p}\text{ は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ p^{fl}=m} \log p^f,$$

従って $G(m) = 0\ for\ m \neq p^e$. p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$.
よって $m = p^e$, p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$ のとき,

$$G(p^e) = \sum_{\mathbf{p}|(p),\ l\in\mathbf{N}\ :\ p^{fl}=p^e} \log p^f$$

$(p) = \mathbf{p_1}^{e_1} \cdots \mathbf{p_k}^{e_k}$, $\mathbf{p}_i$ の (絶対) 次数を f_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ とすると

$$G(p^e) = \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p_i}\ i=1,\cdots,k\ :\ p^{f_i l_i}=p^e} \log p^{f_i}$$
$$= \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p_i}\ i=1,\cdots,k\ :\ f_i l_i=e} \log p^{f_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{f_i|e} \log p^{f_i} \quad (f_i|e\text{ ではないときは }\sum_{f_i|e} = \phi)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} \log p^e$$
$$\leq k \log m \ll n \log m \qquad \square.$$

補題 16

$$L_K(\frac{1}{2},\chi)\neq 0.$$

証明

関数等式

$$A(\mathbf{m})^s\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)L_K(s,\chi)$$
$$=T(\chi)A(\mathbf{m})^{1-s}\prod_{\mu=1}^{r_1+r_2}\Gamma\left(\frac{n_\mu(1-s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)L_K(1-s,\overline{\chi})$$

の両辺を対数微分すると

$$\log A(\mathbf{m})+\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)+\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi)$$
$$=-\log A(\mathbf{m})-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(1-s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)-$$
$$-\frac{L'_K}{L_K}(1-s,\overline{\chi})$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi)+\frac{L'_K}{L_K}(1-s,\overline{\chi})=$$
$$=-2\log A(\mathbf{m})-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)-$$
$$-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(1-s+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)$$

これに $s=\frac{1}{2}$ を代入すると

$$2\Re\left\{\frac{L'_K}{L_K}(\frac{1}{2},\chi)\right\}=\frac{L'_K}{L_K}(\frac{1}{2},\chi)+\frac{L'_K}{L_K}(\frac{1}{2},\overline{\chi})=$$
$$=-2\log A(\mathbf{m})-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(\frac{1}{2}+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)-$$
$$-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}\frac{n_\mu}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(\frac{1}{2}+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)$$
$$=-2\log A(\mathbf{m})-\sum_{\mu=1}^{r_1+r_2}n_\mu\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{n_\mu(\frac{1}{2}+iv_\mu)+|u_\mu|}{2}\right)-$$
$$\neq\infty$$

となるので $L_K(\frac{1}{2},\chi)\neq 0.\ \square$

主定理1の証明

以降，$o(\cdot)$, $O(\cdot)$, $\ll$, $\sim$ 等の記号は $\nu\to+\infty$ のときを考えている。
$s=\sigma+it$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$, $\nu\in\mathrm{N}$, $1\ll\nu$, $X,Y>1$, $\delta>1$ として次の積分を考える：

$$I_\nu=\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)dw}{w^2\log Y}$$
$$(\frac{1}{2}<\sigma<1,\ w=u+iv).$$

ここで，後に $X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\ll\frac{1}{\sigma-\beta_0}$, $\delta>1$ [43] とする。δ は後に決める。
補題12,15を使うと，この積分 I_ν は

$$I_\nu=\frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{w/\nu}}\frac{dw}{w^2\log Y}$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^\nu}\frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s}\alpha_n,$$
$$where\ \alpha_n:=\begin{cases}1 & ,\quad (n\le X^\nu)\\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right)\le 1, & (X^\nu\le n\le(XY)^\nu)\\ 0 & ,\quad ((XY)^\nu\le n)\end{cases}$$
$$\cdots(1)$$

となる。ここで，

$$(-1)^{\nu+1}\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

である。
ここで積分路を次の $L=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである：$A>1$ として

$$L=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$$
$$L_1=[\nu-i\infty,\ \nu+i\nu(V_m^- -t)],$$
$$L_2=[\nu+i\nu(V_m^- -t),\ -A+i\nu(V_m^- -t)],$$
$$L_3=[-A+i\nu(V_m^- -t),\ -A+i\nu(V_m^+ -t)],$$

$$L_4 = [-A + i\nu(V_m^+ - t),\ \nu + i\nu(V_m^+ - t)],$$
$$L_5 = [-\nu + i\nu(V_m^+ - t),\ \nu + i\infty].$$

留数定理により，

$$\begin{aligned}
I_\nu &= \operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu,\chi})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s,\chi)^{(\nu)}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!_{,}}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2)
\end{aligned}$$

を得る。ここで，補題 10 を使った。また，$\nu \gg 1$ であるので $\frac{\zeta'_K}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})$ の特異点 $w=\nu(\rho-s)$，$\nu(0-s)$ は $\Re\nu(\rho-s) < -A$，$\Re\nu(0-s) < -A$ となり，積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w=\nu(\rho-s)$，$\nu(0-s)$ は存在しない。

次に (2) の 5 つの積分を上から評価する。
積分路 L_1 上では，補題 15 より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^- -t)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{L'_K}{L_K}(\sigma+1,\chi)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|w|^2}dw\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{n(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma-1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll n\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty \frac{dv}{\nu^2+v^2}\\
&= \frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}\\
&= (XY)^\nu\frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\ll (XY)^\nu\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\\
&\ll \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma}\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu \qquad \cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。ここで補題2を使った。

積分路 L_5 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma}\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu \qquad \cdots(3')
\end{aligned}
$$

積分路 L_2 上では

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu+i\nu(V_m^- -t)}^{-A+i\nu(V_m^- -t)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{L'_K}{L_K}(\sigma+it+\frac{u}{\nu}+\frac{i}{\nu}\nu(V_m^- -t),\chi)^{(\nu)}\right|\times\\
&\times\frac{(XY)^\nu}{|i\nu(V_m^- -t)|^2}dw\\
&\ll \frac{1}{\log Y}\int_\nu^{-A}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{L'_K}{L_K}(\sigma+\frac{u}{\nu}+iV_m^-,\chi)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|\nu(V_m^- -t)|^2}du\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}\int_\nu^{-A}\frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2}du\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}(A+\nu)\frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \qquad \cdots(4)
\end{aligned}
$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \qquad \cdots(4')
\end{aligned}
$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。$B \gg 1$ として積分路 L_3 を3つ：

$$
\begin{aligned}
&L_{3,1} := [-A + i\nu(V_m^- - t), -A - iB],\\
&L_{3,2} := [-A - iB, -A + iB],\\
&L_{3,3} := [-A + iB, -A + i\nu(V_m^+ - t)],\\
&0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}
\end{aligned}
$$

に分けて評価する。A の値は後に決めるが，その A の値に対して B を定める。
さて

$$
\left(s - \rho_0 + \frac{-A + iv}{\nu}\right)^{\nu+1}
$$

を考える。
仮定している $s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0)(1 + i\mathrm{O}(\frac{1}{\nu^2}))$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(s - \rho_0 + \frac{-A + iv}{\nu}\right)\right\}^{\nu+1}\\
&= \left\{(\sigma - \beta_0) + \mathrm{O}(\frac{1}{\nu^2}) + \frac{-A + iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&\sim \left\{(\sigma - \beta_0) + \frac{-A + iv}{\nu}\right\}^{\nu+1}\\
&= (\sigma - \beta_0)^{\nu+1}\left(1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)^{\nu+1},
\end{aligned}
$$

$$
\left\{1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}
$$

は $|v| \leq B$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\left\{1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\
&= \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma - \beta_0}\right)}\\
&= (1 + \mathrm{o}(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

であり $|v| \geq B$ のときは,

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\\
&=\left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\left|1+i\frac{v/\{\nu(\sigma-\beta_0)\}}{1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}}\right|^{-(\nu+1)}\\
&\sim \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\left|1+i\frac{v}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\\
&\leq \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,3}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right|\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)}\left|\frac{1+o(1)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{1+o(1)}{\left|s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{(1+o(1))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{dv}{(A^2+v^2)}\\
&< \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\infty}\frac{dv}{(A^2+v^2)}\\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\int_{\frac{B}{A}}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)}\\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\left\{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

$$\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$
$$= \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y}$$
$$\cdots(5)$$

ここで $w \in L_{3,3}$ であるから，$w = -A + iv = -A + i\nu(y-t)$，$B \le v \le \nu(V_m^+ - t)$ より

$$\begin{aligned} s + \frac{w}{\nu} &= \sigma + it + \frac{-A + i\nu(y-t)}{\nu} \\ &= (\sigma - \frac{A}{\nu}) + iy \quad (\frac{B}{\nu} + t \le y \le V_m^+). \end{aligned}$$

従って，$\rho \ne \rho_0$ なる ρ に対して $w \in L_{3,3}$ であるとき

$$\left|s + \frac{w}{\nu} - \rho\right| > \left|s + \frac{w}{\nu} - \rho_0\right|$$

となるので補題 12 を使ったことに注意すべきである。
$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,1}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw\right|$$
$$\le \frac{1}{2\pi}\int_{-A+i\nu(V_m^- - t)}^{-A-iB} \left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y}$$
$$\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)$$
$$= \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y}$$
$$\cdots(5')$$

となる。
最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw$$

について詳述する:
$|v| \le B$ のとき，

$$\left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1 + \mathrm{o}(1)}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)} \\
&= (1 + \mathrm{o}(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

であるが，これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)} \ll 1$ であるので

$$
\begin{aligned}
&\left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)} \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \exp\left[(-\nu)\log\left(1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right] \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \times \\
&\times \exp\left[(-\nu)\left\{\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} - \frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^2 + \cdots\right\}\right] \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \times \\
&\times \exp\left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)} + \frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \exp\left[\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \exp\left[\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3 + \cdots\right\}\right] \\
&= \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \\
&= \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

$$= (1+\mathrm{o}(1))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)$$

である。このことを使って

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L'_K}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&=\frac{-1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB}\frac{1+o(1)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B}\frac{1+o(1)}{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y}\\
&=\frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv\\
&\quad\cdots(\star)
\end{aligned}$$

$(\star)$の右辺の積分を

$$\begin{aligned}
F_\nu(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv
\end{aligned}$$

と置いて

$$\begin{aligned}
F(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times\\
&\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv
\end{aligned}$$

とする。

$$\left|\frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)\right|$$
$$\leq \frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

をみたし，

$$\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

は可積分 integrable であるので
Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

である。また補題15より
$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっている。また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X=0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

は $X=0$ を除いて $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu\gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}F_\nu(X)\quad with\ \lim_{\nu\to\infty}F_\nu(X)=F(X)$$

で $F(X)$ は $X>0$ で実解析的で ν に依存しない
複素数値実解析関数である。

$\cdots(6)$

(1), (2), (3), (3′), (4), (4′), (5), (5′), (6) を使うと

$$
\begin{aligned}
& I_\nu \equiv \\
& = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \\
& = -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} + \\
& + \mathrm{O}\left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} + \mathrm{O}\left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,2}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw,
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw - \\
& -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2} \right) + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\int_{L_{3,2}}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L_K'}{L_K}(s+\frac{w}{\nu},\chi)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w-1)}{w^2 \log Y} dw \\
& = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\
& + \mathrm{O}\left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} + \mathrm{O}\left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y} \right) \right\} - \\
& -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \\
& = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\
& + \mathrm{O}\left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} + \mathrm{O}\left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow \clubsuit$

を得る。ここで上記左辺の第1項：

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}$$

が

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}>\frac{1}{4}$$

であるように $A>1$, $Y>1$ を選び(実際の A, B の選び方は第1番目に上記のように A を選び，第2番目に B を選ぶ)，そして

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right\}$$

に関して

$$\alpha:=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

と置き (α が X に依存しないように A を定めることが出来ることに注意すべきである。)

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\neq 0$$

となるよう

$$X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\ll\frac{1}{\sigma-\beta_0},\ \delta>1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと，定数 constant でないこと (注) から可能である。また上記

$$\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。

従って上記♣は

$\clubsuit \Longleftrightarrow$

$$-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\nu!} \sum_{m \le (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\
&+ O\left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} + O\left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} \\
&\mathit{with}\ \ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0 \\
&\quad \cdots (7)
\end{aligned}
$$

となる。

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\nu \to \infty} F_\nu(X) = F(X) \\
&\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0
\end{aligned}
$$

より，即ち

$$
\left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \to \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| > 0 \ \ as\ \nu \to \infty
$$

より，十分小さい正数$0 < \epsilon_0 \ll 1$を

$$
0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0
$$

を満たすように選ぶと十分大きい$^\forall \nu \gg 1$に対して

$$
0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| + \epsilon_0 \qquad \cdots (\star\star)
$$

となる。
上記(7)の左辺の絶対値の$\frac{1}{\nu}$乗平均値積分を考えるが，$(\star\star)$と補題1から

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0 - h}^{\gamma_0 + h} \left| \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} dt \\
&\le \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0 - h}^{\gamma_0 + h} \left\{ \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \right\}^{\frac{1}{\nu}} dt \\
&\le \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0 - h}^{\gamma_0 + h} \left| \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
&\le \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0 - h}^{\gamma_0 + h} \left| O\left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O\left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} + \right.\right.
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\Bigg|^{2}dt\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\le\left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left(\left|O\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}\right|+\left|O\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right\}\right|+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\right|\right)^{2}dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\le\left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}O\left(\left|O\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right\}\right|^{2}+\right.\right.
$$

$$
+\left|O\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right\}\right|^{2}+
$$

$$
+\left|O\left\{\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\right\}\right|^{2}\ )\,dt]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\le\left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}O\left(\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^{2}+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^{2}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\right|^{2}\right)dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\le\left[O\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\right|^{2}dt+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^{2}+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^{2}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\le\left[O\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^{s}}\alpha_m\right|^{2}dt+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^{2}+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^{2}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}
$$

$$
\cdots(8)
$$

を得る。ここで $a,b,c,d \geq 0$ に対して $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ であることを使った。
(8) の右辺の積分に対して補題3を使うと

$$\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\left[\mathrm{O}\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m\right|^2dt+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\left[\mathrm{O}\left\{\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+\right.\right.$$

$$+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2\right)+$$

$$\left.\left.+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\left[\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}\quad\cdots(9)$$

ここで，$\nu\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0}=$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\left[\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+\right.\right.$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\cdots(10)$$

(10) の右辺の第1項を補題2を使って評価する：

$$\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{n^2(\log m)^{2\nu+2}}{m^{2\sigma}}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\times$$

$$\times(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}$$

$$<\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}$$

$$\cdots(11)$$

(10) に (11) を代入して，補題4を使うと：

$$\frac{1}{|\sigma-\beta_0|}\leq$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\max\left\{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\right.$$

$$\left.\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)\right\}$$

$$=\max\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)\right\}$$

$$\cdots(12)$$

(12) で $\sigma-\beta_0>0$ を保ちながら，σ を β_0 に十分近づければ，$\beta_0>\frac{1}{2}$ であるので，(12) の左辺は ∞ に近づき，一方 (12) の右辺は

$$\max\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)\right\}\Bigg|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$, $\beta_0>\frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $L_K(s,\chi)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注： $F(X)$ が定数でないことの証明

$$G(z):=F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

$$=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2}\exp((-A+iv)z)dv$$

$$with\quad z:=\log X$$

$G(z) = constant$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\frac{d}{dz}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)} \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp(ivz)dv$$
$$= 0$$

$$\Longrightarrow$$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \exp(ivz)dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{-A+iv} \exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A} \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz)dv$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A\int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log XY-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A\left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$
$$= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A\frac{\sin\left\{B\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log XY-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log XY-\frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)+B\log Y\right\}}{\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}+\log Y}$$

ここで, $\log Y = 2\pi,\ B \in \mathrm{N}$ とすると

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A\frac{\sin\left\{B\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X-\frac{1}{\sigma-\beta_0}+2\pi}$$

$\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} \neq 0$ と出来るので
$\Longleftrightarrow$

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X \gg 1$ であるが，$A \gg 1$ であるので
$\Longleftrightarrow$

$$1 \ll e^{2\pi A} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi}, 1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq constant.$ □

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ の選び方
$X = \exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}, Y = e^{2\pi}, A, B \in \mathbf{N}, \sigma - \beta_0$ は次の条件 (a),(b),(c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi}\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}} \cdots \text{(a)}$$
$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \cdots \text{(b)}$$
$$\frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{A}\right) > \frac{1}{4} \cdots \text{(c)}$$

満たすが，先ず (a) を満たすように $\sigma - \beta_0$ を選び，次に (c) を満たすように A を選んでから，(b) を満たすように B を選ぶ。
注意1：主定理1を繰り返し適用すると，
$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり，
非零領域 zero free region：

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

は，左方向に広がって行き，遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。
主定理は次の結論を導いている。即ち，存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず，$\frac{1}{2} < \sigma$ となる $L_K(s,\chi)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば，結局 $L_K(s,\chi)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。
$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので，この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。
注意 2: $\log L_K(s,\chi)$ が Dirichlet 級数に展開出来る事，即ち $L_K(s,\chi)$ が Euler 積を持つ事が重要である。従って，一般に Euler 積 product を持つ zeta 関数 or L-関数に対しても，この論文の議論は適用出来るはずである。
注意 3: [22] の方法を用いれば，Artin L-関数に対して de la Vallée-Poussin 型の非零正則領域が得られ，$s = 1$ の「近く」の可能性を除いて $\Re s = \sigma = 1$ 上に零点，極を持たない事が証明される。このことと [20] [21] [24] の方法を使うと $s = 1$ の「近く」の可能性を除けば $\sigma \neq \frac{1}{2}$ に非自明な零点，極は存在しない事が証明される。詳しくは [33] を参照せよ。

参考文献

[1] Chandrasekharan,K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.

[2] Davenport,H: *Multicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)

[3] 土井公二 Doi,K.，三宅敏恒 Miyake,T.:『保型形式と整数論』紀伊國屋書店, 1976. *Modular Forms and Number Theory* (in Japanese), Kinokuniya-shoten, Tokyo, 1976.

[4] 藤崎源二郎 Fujisaki,G. 森田康夫 Morita,Y. 山本芳彦 Yamamoto,Y:『数論への入門』, 日本評論社, 1980. *Introduction to Number Theory* (in Japanese), Nihon-Hyouron-sha, Tokyo, 1980.

[5] Goldstein,L.J.: *Analytic Number Theory*, Prentice-Hall, 1971.

[6] Iwaniec,H.: *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Math. Soc., 1997.

[7] Iwaniec,H. and Kowalski,E.: *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., 2004.

[8] 河田敬義 Kawada,Y.: 『数論 I,II,III』岩波書店, 1978.
Number Theory, Iwanami-shoten, Tokyo, 1978.

[9] 木田雅成 Kida,M.: 『数理・情報のための数論講義』サイエンス社, 2007. *Lectures on Number Theory for Mathematical or Information Science*, Science-sha, Tokyo, 2007.

[10] Koch,H.: *Introduction to Classical Mathematics* I, Kluwer Academic Publisher, 1991. (translated by Stillwell, D. from Einführing in die Klassische Mathematik I, Academie-Verlag, Berlin, 1986.)

[11] Koch,H.: *Number Theory; Algebraic Numbers and Functions*, Amer. Math. Soc., 2000. (translated by Kramer, D. from the German ed. Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbbaden, 1997.)

[12] Kowalski,E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.

[13] Landau,E.: *Handbuch der Leher von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 87,88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]

[14] Landau,E.: *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Teubner, Leipzig, 1918. [Reprint: Chelsea, New York, 1949.]

[15] Lang,S.: *Algebraic Number Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1986.

[16] 三井孝美 Mitsui,T.: 『整数論：解析的整数論入門』至文堂, 1970.
Number Theory; Introduction to Analytic Number Theory (in Japanese), Shibunndo, Tokyo, 1970.

[17] 三井孝美 Mitsui,T.: 『解析的数論』岩波書店, 1989.
Analytic Number Theory (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1989.

[18] Miyake,T.: Modular Forms, Springer, 1989. (translation of [3])

[19] 森田康夫 Morita,Y.:『整数論』東京大学出版会，1999.
Number Theory (in Japanese), Univ. of Tokyo Press, 1999.

[20] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 A Mean Value Integral, 鹿児島経済論集，第 59 巻 1 号, 2018 年 10 月, 1-31, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, October 2018, 1-31.

[21] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (II) A Mean Value Integral(II), 鹿児島経済論集，第 59 巻 2 号, 2018 年 12 月, 141-154, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, December 2018, 141-154.

[22] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 61-76.

[23] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 不完全 Gamma 関数の漸近公式 Asymptotic Formula of the Incomplete Gamma Function,
鹿児島経済論集，第 60 巻 4 号, 2020 年 3 月, 555-560, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this volume), March 2020, 555-560.

[24] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III:補遺); 実軸上或いは実軸近くの零点, A Mean Value Integral(III:Appendix); Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Riemann Zeta-Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 265-303, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 265-303 .

[25] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 21-60, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 21-60.

[26] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の Landau-Page-Siegel-龍沢零点, Landau-Page-Siegel-Tatuzawa's Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集，第 60 巻 2 号, 2019 年 9 月, 153-193, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 153-193.

[27] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Ramanujan の L_τ 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Ramanujan's L_τ-Function, 鹿児島経済論集，第 60 巻

2号, 2019年9月, 195-240, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 195-240.

[28] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with cusp form f, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 305-350, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 305-350.

[29] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Maass尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with Maass cusp form f, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 351-405, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 351-405.

[30] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: DedekindのZeta関数の実軸から「離れている」非自明な零点, Non-Trivial Zeros that are "not near" the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 407-451, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 407-451.

[31] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: DedekindのZeta関数の実軸上或いは実軸に近い非自明な零点, Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻4号, 2020年3月, 561-606, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 561-606.

[32] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Heckeの放射類群指標を持つ L-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Hecke's L-Functions with ray class group character, 鹿児島経済論集, 第60巻4号, 2020年3月, 607-652, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, March 2020, 607-652.

[33] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Artinの L-関数の非自明な零点及び極, Non-Trivial Zeros and Poles of Artin's L-Functions, 鹿児島経済論集, 第61巻第1号, 2020年6月, □-□, *The Kagoshima Journal of Economics*, **61**, June 2020, □-□.

[34] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』, 丸善出版, 訂正版2014, 2012, 『素数定理の進展・下』, 丸善出版, 2013)

[35] Narkiewicz,W.: *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. (originally published by PWN(Polish Sci. Publ.), Warszawa, 1974.)

[36] Neukirch,J.: *Analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. (邦訳：梅垣敦紀 訳『代数的整数論』，シュプリンガー・フェアラーク東京，2003.)

[37] Selberg,A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.

[38] Siegel,C.L.: *Analytische Zahlentheorie*, Lecture Notes, Univ. of Göttingen, 1963/64.
(邦訳：片山孝次 訳『解析的整数論 I，II』，岩波書店，2018)

[39] 末綱恕一 Suetuna,Z.:『整数論及代数学』新修輓近高等数学講座第 16 巻，共立社，1935. *Number Theory and Algebra* (in Japanese), Kyouritsu-Sha, Tokyo, 1935.

[40] 末綱恕一 Suetuna,Z.:『解析的整数論』岩波書店，1950. (1934 岩波数学講座の一巻として出版) *Analytic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1950. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)

[41] 高木貞治 Takagi,T.:『代数的整数論　第 2 版』岩波書店，1971. (1935 岩波数学講座の一巻として出版) *Algebraic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1971. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)

[42] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[43] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[44] Terras,A.: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces —Euclidean Space, the Sphere, and the Poincaré Upper Half Plane—*, 2nd ed., Springer, 2013, (1st ed., 1985).

[45] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

[46] 辻正次 Tsuji,M.: 『複素函数論』，槇書店，1968. *Complex Function Theory* (in Japanese)，Maki-Shoten, Tokyo, 1968.

[47] 山口周 Yamaguchi,I.: 『整数論―美しき円分体論・ベルヌーイ数への旅路―』産業図書，1994. *Number Theory ―A Journey to Beautiful Cyclotomic Field Theory and Bernoulli Numbers―*, Sangyo-Tosho, Tokyo, 1994.

(received 16 November 2019.)