

Heckeの放射類群指標を持つ L -関数
の非自明な零点
Non-Trivial Zeros
of
Hecke's L -Functions
with ray class group character

中嶋眞澄

Masumi NAKAJIMA

Department of Economics

International University of Kagoshima

Kagoshima 891-0197, JAPAN

e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概要

Abstract

We study here non-trivial zeros of Hecke's L -functions with ray class group character.

Key words ; Hecke's L -function.

Mathematics Subject Classification 2010; 11S40.

K を \mathbf{Q} (有理数体) 上 n 次の代数体 ($n = [K : \mathbf{Q}]$), $O := O_K$ を K の整数環とする。 K の (分数) イdeal 全体のなす群を I と表わし, P を単項 (分数) イdeal 全体のなす群とする。 I/P は K のイdeal 類群で $h := \#(I/P)$ は K の類数である。

整イdeal \mathfrak{n} のノルムを $N(\mathfrak{n}) := \#(O/\mathfrak{n})$ で定義し, 分数イdeal $\alpha = \frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{b}}$, ($\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ は整イdeal) のノルムを $N(\alpha) = \frac{N(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{b})}$ と定義する。素イ

デアル全体の集合を Prim_K で表わす。

以下は主に [39] [3] [18] に従う。 K の素イデアルを有限素点とも云い K の r_1 個の実共役体, $2r_2$ 個の共役体に対応する相異なる同型写像は $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_\mu, \dots, \tau_n$ である。 $K_\mu := K^{\tau_\mu}$, $a_\mu := a^{\tau_\mu}$ と置き

$$\begin{aligned} a_\mu &= a^{\tau_\mu} \in \mathbf{R}, K_\mu \subset \mathbf{R} \quad (1 \leq \mu \leq r_1) \quad (a^{\tau_\mu} : \text{実 と云う}), \\ a_\mu &= a^{\tau_\mu} \notin \mathbf{R}, K_\mu \not\subset \mathbf{R} \quad (r_1 < \mu) \quad (a^{\tau_\mu} : \text{虚 と云う}), \\ a_\mu &= \overline{a_{r_2+\mu}} \quad (r_1 + 1 \leq \mu \leq r_1 + r_2) \end{aligned}$$

と番号付けをしておく。

\mathfrak{m} を整イデアルとして

$$\begin{aligned} I(\mathfrak{m}) &:= \{ \mathfrak{a} \in I \mid (\mathfrak{a}, \mathfrak{m}) = 1 \}, \quad (\mathfrak{a} \text{ と } \mathfrak{m} \text{ は無縁 } \textit{insignificance}) \\ P(\mathfrak{m}) &:= \{ (a) \in P \mid a \equiv 1 \pmod{\times \mathfrak{m}} \} \\ \text{mod}^\times &\text{ は乗法的合同である。} \end{aligned}$$

と置き, $u_\mu \in \{0, 1\}$, $(1 \leq \mu \leq r_1)$ とする。群 $I(\mathfrak{m})$ の指標 character:

$$\chi : I(\mathfrak{m}) \rightarrow \{ z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1 \}$$

が

$$\chi((a)) = \prod_{\mu=1}^{r_1} \left(\frac{a_\mu}{|a_\mu|} \right)^{u_\mu} \cdots (\odot)$$

を満たすとき, $\text{mod } \mathfrak{m}$ の放射類群 ray class group 上の指標 character という。

$$M := \{ \mathfrak{n} \mid \mathfrak{n} \text{ は整イデアル, } (\odot) \text{ holds for } \exists (a) \in P(\mathfrak{n}) \cap I(\mathfrak{m}) \}$$

M の元であるイデアルの最大公約イデアルを上記 χ の導手 conductor と云って \mathfrak{m}^* で表わす。 $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^*$ である指標 χ^* を原始指標 primitive character と云う。 $\mathfrak{n} \notin I(\mathfrak{m})$ のときには $\chi(\mathfrak{n}) = 0$ と定義する。

注 上記 (\odot) は [39] の第2章定理 11(p.64) に相当するが, ここでは定義としている。

Hecke の放射類群原始指標 primitive ray class group character: χ を持つ L -関数を次で定義する:

$$L_K(s, \chi) := \sum_{(1) | \mathfrak{n} \in I} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s}, \quad \Re s > 1 \quad (s \in \mathbf{C}, (1) = O_K).$$

$L_K(s, \chi)$, $\chi \pmod{\mathfrak{m}}$: primitive non-trivial は次の性質を持つ。

(i) 上記 $L_K(s, \chi)$ の右辺は $\Re s > 1$ で絶対収束する。又この範囲で Euler 積：

$$\sum_{(1) | \mathfrak{n} \in I} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Prim}_K} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{n})N(\mathfrak{p})^{-s}}, \quad \Re s > 1$$

を持つので、この範囲には零点、極を持たない。

(ii) $L_K(s, \chi)$ は \mathbb{C} 全体に解析接続され、整関数となる。

(iii)

$$\Theta_K(s, \chi) := A(\mathfrak{m})^s \prod_{\mu=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{s + u_\mu}{2}\right) \Gamma(s)^{r_2} L_K(s, \chi)$$

$$\text{where } A(\mathfrak{m}) := 2^{-r_2} \pi^{-\frac{n}{2}} \sqrt{|d_K| N(\mathfrak{m})}, \quad d_K \text{ は } K \text{ の判別式.}$$

と置くと関数等式 functional equation:

$$\Theta_K(s, \chi) = W(\chi) \Theta_K(1 - s, \bar{\chi})$$

$$\text{where } W(\chi) \text{ depends on } \chi \text{ with } |W(\chi)| = 1$$

(iv) s 平面の任意の帯状領域 $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ で $\Theta_K(s, \chi)$ は有界 bounded

を満たすので、 $0 < \Re s < 1$ 内の $L_K(s, \chi)$ の非自明な零点以外の零点は $q := u_1 + \dots + u_{r_1}$ と置いて

$$s = -1, -3, -5, \dots$$

で $r_2 + q$ 位の零点を、

$$s = 0, -2, -4, -6, \dots$$

で $r_1 + r_2 - q$ 位の零点を持つ。($s = 0$ の場合は $L_K(1, \chi) \neq 0$ が云えるので関数等式より $r_1 + r_2 - q$ 位を超える零点は持たない。)

これらの零点を自明な零点 trivial zeros と云う。 $s = 0$ を除いて $\Re s = 0, 1$ には零点が存在しない事が知られている。

次の定理を証明する：

主定理 1 $m \in \mathbb{Z}$ を一つ固定し、 $C_m = m$ (or $m + \frac{1}{2}$) とする。また、以下の σ も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。 $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $\nu \gg 1$

は十分大きい自然数とする。又、 $C_{m-1} < t < C_m$ とする。

$L_K(s, \chi)$ の非自明な零点 *non-trivial zero*: $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ ($\gamma_0 = 0$ も含める *including*) を、

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho = \beta + i\gamma, L_K(\rho, \chi) = 0, C_{m-1} < \gamma < C_m\}$$

で定義する。従って、領域 $\{w = u + iv \mid \beta_0 < u, C_{m-1} < v < C_m\}$ は非零領域 *zero free region* となる。

$\rho_+, \rho_-, \beta_+ > \frac{1}{2}, \beta_- > \frac{1}{2}, \gamma_+, \gamma_-, U_m^+, U_m^-, U_m, V_m^+, V_m^- > 0$ を次で定義する。

$$\rho_+ = \beta_+ + i\gamma_+, \zeta_K(\rho_+) = 0$$

$$\gamma_+ := \min\{\gamma \mid \rho = \beta + i\gamma, \beta > \frac{1}{2}, L_K(\rho, \chi) = 0, \gamma_0 < \gamma\}$$

$$\rho_- = \beta_- + i\gamma_-, \zeta_K(\rho_-) = 0$$

$$\gamma_- := \max\{\gamma \mid \rho = \beta + i\gamma, \beta > \frac{1}{2}, L_K(\rho, \chi) = 0, \gamma < \gamma_0\}$$

$$U_m^+ := \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0), C_m\}$$

$$U_m^- := \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-), C_{m-1}\}$$

$$U_m := \frac{1}{2} \min\{|U_m^+ - \gamma_0|, |U_m^- - \gamma_0|, 1\}$$

$$V_m^+ := \gamma_0 + U_m$$

$$V_m^- := \gamma_0 - U_m$$

ρ_0 の左側: $\Im\rho = \gamma_0, L_K(\rho, \chi) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0, \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \dots$$

$$(\frac{1}{2} < \dots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0, \zeta_K(\rho_i) = 0, \Im\rho_i = \gamma_0, i = 1, 2, \dots)$$

とする (ρ_1, ρ_2, \dots が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする)。

注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u, U_{m-1}^- \leq v \leq U_m^+, v \neq \gamma_0\}$ は非零領域 *zero free region* である。

$\sigma, s = \sigma + it, h := \frac{1}{\nu^2}(\sigma - \beta_0), t, Y > 1, \delta > 1$ を

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \min \left\{ \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}, \frac{U_m}{Y \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})} \right\}$$

…(*)

$$\gamma_0 - h \leq t \leq \gamma_0 + h$$

(これより,

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\nu^4}(\sigma - \beta_0)^2}} \leq \frac{1}{|s - \rho_0|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma - \beta_0)^2 + (t - \gamma_0)^2}} \leq \frac{1}{\sigma - \beta_0},$$

$$s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0) + i(t - \gamma_0) = (\sigma - \beta_0)(1 + iO(\frac{1}{\nu^2})),$$

$$\frac{|\rho - s|}{|\rho_0 - s|} > 2 \quad (\rho \neq \rho_0) \text{ for } \forall \rho = \beta + i\gamma, \quad \frac{|1 - s|}{|\rho_0 - s|} > 2$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta_K(\rho)$ の非自明な零点 non-trivial zero) となるように選ぶ(これは明らかに可能である。)と,

$$\frac{1}{\sigma - \beta_0} \leq \max \left\{ Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{\sigma - \frac{1}{2}}, Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right\}$$

となる。

従って、この結論は定理の仮定(*)と矛盾し、 ρ_0 は、もはや $L_K(s, \chi)$ の非自明な零点 non-trivial zero ではあり得ない。

主定理 1 を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 (Hölder の不等式の系)

$\nu > 1, H > 0, [A, A + H]$ で可積分な関数 $f(t)$ に対して、

$$\frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^{1/\nu} dt \leq \left[\frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^2 dt \right]^{1/(2\nu)},$$

$$\frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^{1/(2\nu)} dt \leq \left[\frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)| dt \right]^{1/(2\nu)}$$

が成立する。

証明

$(1/2\nu) + (1/\mu) = 1$ となる μ をえらぶ。Hölder の不等式より

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^{1/\nu} dt \\ & \leq \frac{1}{H} \left\{ \int_A^{A+H} |f(t)|^{(1/\nu) \cdot 2\nu} dt \right\}^{1/2\nu} \left\{ \int_A^{A+H} 1^\mu dt \right\}^{1/\mu} \\ & = \frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}} \left\{ \int_A^{A+H} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2\nu} H^{1/\mu} \\ & = \left\{ \frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^2 dt \right\}^{1/2\nu} \end{aligned}$$

を得る。後半については同様にして

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)|^{1/(2\nu)} dt \\ & \leq \frac{1}{H} \left\{ \int_A^{A+H} |f(t)|^{(1/(2\nu)) \cdot 2\nu} dt \right\}^{1/2\nu} \left\{ \int_A^{A+H} 1^\mu dt \right\}^{1/\mu} \\ & = \frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}} \left\{ \int_A^{A+H} |f(t)| dt \right\}^{1/2\nu} H^{1/\mu} \\ & = \left\{ \frac{1}{H} \int_A^{A+H} |f(t)| dt \right\}^{1/2\nu} \end{aligned}$$

□

補題 2 $\sigma > 1$, $m = 0, 1, 2, \dots$ とする。

$m = 0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} < 1 + \frac{1}{\sigma - 1}$$

$m = 1, 2, \dots$ のとき

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} & < m! \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right)^m \left\{ \frac{1}{\sigma - 1} + \frac{1}{e} \left(\frac{\sigma - 1}{\sigma} \right)^m \right\} \\ & \ll m! \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right)^{m+1} \quad (\text{as } m \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成立する。即ち

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^\sigma} \ll m! \left(\frac{1}{\sigma - 1} \right)^{m+1} \quad \text{for } \sigma > 1, m = 0, 1, 2, \dots$$

証明 先ず $m = 1, 2, \dots$ のときを考える。

$f(y) := y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y) = y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m - \sigma \log y\}$ であるから、 $f'(y_0) = 0$ となるのは、 $y_0 = \exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} + \frac{(\log [y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} + \sum_{n=[y_0]+1}^{\infty} \frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} \\ &< \int_2^{[y_0]} \frac{(\log x)^m}{x^{\sigma}} dx + \frac{(\log [y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} + \int_{[y_0]}^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^{\sigma}} dx \\ &< \int_1^{\infty} \frac{(\log x)^m}{x^{\sigma}} dx + \frac{(\log [y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(\log [y_0])^m}{[y_0]^{\sigma}} \\ &\leq m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^{\sigma}} \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + \left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m \\ &\leq m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1} + m! \frac{1}{e} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^m \\ &= m! \left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m \left\{ \frac{1}{\sigma-1} + \frac{1}{e} \left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m \right\} \end{aligned}$$

但し、 $[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又、

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m \leq \frac{m!}{e}$$

を使った。

$m = 0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^{\sigma}} dx = 1 + \frac{1}{\sigma-1}$$

となり、補題は証明された。□

補題 3 (Montgomery-Vaughan の定理, [44] の 2nd ed.)

$a_n \in \mathbf{C}$, $A \in \mathbf{R}$, $H > 0$, $Y > 1$, $\sigma > \frac{1}{2}$ とする。このとき

$$\begin{aligned} \int_A^{A+H} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt &= H \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1-2\sigma}\right) \\ \int_A^{A+H} \left| \sum_{n \leq Y} a_n n^{-\sigma-it} \right|^2 dt &= H \sum_{n \leq Y} |a_n|^2 n^{-2\sigma} + O\left(Y \sum_{n \leq Y} |a_n|^2 n^{-2\sigma}\right) \end{aligned}$$

が成立する。ここに、最初の式 *the first equation above* に於ける

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1-2\sigma}$$

は収束すると仮定し、 O は絶対定数を持つ Bachmann-Landau のラージ・オウ記号 [33] である。

補題 4 $a_i, c_i = c_i(\nu) \in \mathbf{C}, f_i(\nu) \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow \infty, (i = 0, 1, \dots, n)$ とする。又、 $|a_0| > |a_i| (i = 1, 2, \dots, n), |c_i|^{1/\nu} \rightarrow 1 (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ as $\nu \rightarrow \infty, c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \left| \sum_{i=0}^n c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^\nu a_i^\nu \right|^{1/\nu} = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i| = |a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\dots,n} |a_i/a_0| = 1/r (r > 1)$ とおく。

$$\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \rightarrow 1, \quad |c_i|^{1/\nu} \rightarrow 1 \text{ as } \nu \rightarrow \infty, (i = 1, 2, \dots, n)$$

また、 n が有限 finite であるので、 $\forall \epsilon > 0$ に対して $\exists \nu_0$ が存在して、

$$\left| \frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \right| < 1 + \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ for } \forall \nu > \nu_0$$

となるが、ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1 + \epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=0}^n c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^\nu a_i^\nu \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{c_0} \left(\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \right)^\nu \left(\frac{a_i}{a_0} \right)^\nu \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + \sum_{i=1}^n O \left(\left(\frac{1 + \epsilon}{r} \right)^\nu \right) \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| 1 + O \left(\frac{1}{R^\nu} \right) \right|^{1/\nu} \\ &= |c_0|^{1/\nu} |a_0| |1 + f_0(\nu)| \left| \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{R^\nu} \right) \right\}^{R^\nu \cdot \frac{1}{\nu R^\nu}} \right| \\ &\rightarrow |a_0| \quad (\text{as } \nu \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 5 [1], [2], [12], [13], [16], [33], [41], [42]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}} \\
 (2) \quad & \log \Gamma(s+1) = -[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty} \{\log(1 - \frac{s}{(-n)}) + \frac{s}{(-n)}\}] \\
 (3) \quad & \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) =: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s} \\
 & = -[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{\frac{1}{s - (-n)} + \frac{1}{(-n)}\}] \\
 & = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + O(\frac{1}{|s+1|^2}) \\
 & = \frac{d}{ds} \log s + \frac{d}{ds} \log \Gamma(s) \\
 & = \frac{1}{s} + \log s - \frac{1}{2s} + O(\frac{1}{|s|^2}) \\
 & = \log s + \frac{1}{2s} + O(\frac{1}{|s|^2})
 \end{aligned}$$

但し、 γ_0 は Euler の定数である。

補題 6 [39]

(i)

$$\begin{aligned}
 \Theta_K(s, \chi) &:= A(\mathbf{m})^s \prod_{\mu=1}^{r_1} \Gamma\left(\frac{s+u_\mu}{2}\right) \Gamma(s)^{r_2} L_K(s, \chi) \\
 &= A(\mathbf{m})^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^q \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1-q} \Gamma(s)^{r_2} L_K(s, \chi) \\
 &= e^{A+B s} \prod_{0 < \Re \rho < 1} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}, \\
 L_K(s, \chi) &= \frac{A(\mathbf{m})^{-s}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^q \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1-q} \Gamma(s)^{r_2}} e^{A+B s} \prod_{0 < \Re \rho < 1} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}
 \end{aligned}$$

(ii) 上記積に現れる零点 zeros: ρ は無限個 *infinitely many* ある。

補題 7 (i)

$$\begin{aligned}
& -\frac{L'_K}{L_K}(s, \chi) = \{\log A(\mathbf{m}) - B\} + \frac{q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + \frac{r_1 - q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \\
& + r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
& = \{\log A(\mathbf{m}) - B\} + \\
& + \frac{q}{2} \left(-\frac{1}{\frac{s+1}{2}} - \left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\frac{s+1}{2} - (-n)} + \frac{1}{(-n)} \right\} \right] \right) + \\
& + \frac{r_1 - q}{2} \left(-\frac{1}{\frac{s}{2}} - \left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\frac{s}{2} - (-n)} + \frac{1}{(-n)} \right\} \right] \right) + \\
& + r_2 \left(-\frac{1}{s} - \left[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s - (-n)} + \frac{1}{(-n)} \right\} \right] \right) - \\
& \quad - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
& = \{\log A(\mathbf{m}) - B\} - \left(\frac{r_1}{2} + r_2 \right) \gamma_0 - \frac{q}{s+1} - \frac{r_1 + r_2 - q}{s} - \\
& - q \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s+1 - (-2n)} + \frac{1}{(-2n)} \right\} - \\
& - (r_1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s - (-2n)} + \frac{1}{(-2n)} \right\} - \\
& - r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{s - (-n)} + \frac{1}{(-n)} \right\} - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\}, \\
& \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K}(s, \chi)^{(\nu)} = -\frac{r_1 + r_2 - q}{s^{\nu+1}} - \frac{q}{(s+1)^{\nu+1}} - \\
& - q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+1 - (-2n))^{\nu+1}} - \\
& - (r_1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s - (-2n))^{\nu+1}} - r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s - (-n))^{\nu+1}} - \\
& - \sum_{\rho} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbf{N}).
\end{aligned}$$

(ii)

$$-\frac{L'_K}{L_K}(s, \chi) = \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} \quad (\Re s > 1)$$

$$\text{where } \Lambda(\mathfrak{n}) := \begin{cases} \log N(\mathfrak{p}), & (\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^m, \exists \mathfrak{p}: \text{prime ideal}, \exists m \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

証明 (i) 補題 6(i) の

$$L_K(s, \chi) = \frac{A(\mathfrak{m})^{-s}}{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^q \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1-q} \Gamma(s)^{r_2}} e^{A+B_s} \prod_{0 < \Re \rho < 1} \left(1 - \frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

を対数微分 logarithmic derivative して補題 5(3) を代入すれば良い。最後の式は更に ν 回微分すれば良い。

(ii) $L_K(s, \chi)$ の Euler 積：

$$L_K(s, \chi) = \sum_{(1)|\mathfrak{n} \in I} \frac{\chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s} = \prod_{\mathfrak{p} \in \text{Prim}_K} \frac{1}{1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}}, \quad \Re s > 1$$

を対数微分 logarithmic derivative すると ($\Re s > 1$)

$$\begin{aligned} -\frac{L'_K(s, \chi)}{L_K(s, \chi)} &= \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Prim}_K} \frac{\chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s} \log N(\mathfrak{p})}{1 - \chi(\mathfrak{p})N(\mathfrak{p})^{-s}} = \\ &= \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Prim}_K} \log N(\mathfrak{p}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathfrak{p})^m}{N(\mathfrak{p})^{ms}} \\ &= \sum_{\mathfrak{p} \in \text{Prim}_K, m \in \mathbf{N}} \frac{\log N(\mathfrak{p}) \chi(\mathfrak{p}^m)}{N(\mathfrak{p}^m)^s} \\ &= \sum_{(1)|\mathfrak{n} \in I} \frac{\Lambda(\mathfrak{n}) \chi(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s}. \end{aligned}$$

これで補題の証明は完了した。□

補題 8 $N_K(T, \chi) := \#\{\rho \in \mathbf{C} \mid 0 < \Re \rho < 1, 0 \leq \Im \rho \leq T, L_K(\rho, \chi) = 0\}$ と定義すると

$$N_K(T+1, \chi) - N_K(T, \chi) \ll \log T.$$

証明 補題 7(i) に補題 5(2) を使って

$$\begin{aligned} -\frac{L'_K(s, \chi)}{L_K(s, \chi)} &= \{\log A(\mathfrak{m}) - B\} + \frac{q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + \frac{r_1-q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + \\ &+ r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \{ \log A(\mathbf{m}) - B \} + O(\log t) - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &= O(\log t) - \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{s - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\}
 \end{aligned}$$

となるが, ここで $s = 2 + iT$ を代入して

$$\begin{aligned}
 -\frac{L'_K}{L_K}(2 + iT, \chi) &= \sum_{(1) | n \in I} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{N(n)^{2+iT}} \\
 &= \sum_{\mathbf{p} \in \text{Prim}_K} \log N(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi(\mathbf{p}^m)}{N(\mathbf{p})^{m(2+iT)}} \\
 &\quad (N(\mathbf{p}) = p^f, \mathbf{p} | (p), f \in \mathbf{N} \text{ は } \mathbf{p} \text{ の (絶対) 次数, } \exists p \text{ は有理素数で} \\
 &\quad q \neq p \text{ なる有理素数 } q \text{ に対して, 素イデアル } \mathbf{q} \text{ が } \mathbf{q} | (q) \text{ ならば } \mathbf{q} \neq \mathbf{p}) \\
 &= \sum_{p: \text{有理素数}} \sum_{\mathbf{p} | (p), \mathbf{p} \in \text{Prim}_K} \log p^f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p^f)^{m(2+iT)}} \\
 &\quad ((p) \text{ の素イデアル分解を } (p) = \mathbf{p}_1^{e_1} \cdots \mathbf{p}_k^{e_k} \text{ とすると,} \\
 &\quad p^n = N((p)) = N(\mathbf{p}_1)^{e_1} \cdots N(\mathbf{p}_k)^{e_k} = (p^{f_1})^{e_1} \cdots (p^{f_k})^{e_k} \text{ より} \\
 &\quad e_1 f_1 + \cdots + e_k f_k = n \text{ となるので } 1 \leq e_i, f_i, k \leq n, i = 1, 2, \dots, k.) \\
 &= \sum_{p: \text{有理素数}} \sum_{i=1}^k \log p^{f_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{O(1)}{(p^{f_i})^{m(2+iT)}} \\
 &\ll \sum_{p: \text{有理素数}} kn \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p)^{2m}} \\
 &\ll n^2 \sum_{p: \text{有理素数}, m \in \mathbf{N}} \frac{\log p}{(p^m)^2} \\
 &= n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{l^2} \ll 1,
 \end{aligned}$$

where $\Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & (n = p^m, \exists p; \text{rational prime}, \exists m \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$

は von Mangoldt 関数である。

を使うと

$$\begin{aligned}
 O(\log T) + \frac{L'_K}{L_K}(2 + iT, \chi) &= \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{2 + iT - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 \Rightarrow &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 O(\log T) + O(1) &= \sum_{\rho} \left\{ \frac{1}{2 + iT - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &\Rightarrow \\
 O(\log T) &= \sum_{\rho} \Re \left\{ \frac{1}{2 + iT - \rho} + \frac{1}{\rho} \right\} \\
 &= \sum_{\rho} \left\{ \frac{2 - \beta}{(2 - \beta)^2 + (T - \gamma)^2} + \frac{\beta}{\beta^2 + \gamma^2} \right\} \\
 &> \sum_{\rho} \frac{1}{2^2 + (T - \gamma)^2} > \sum_{T < \gamma \leq T+1} \frac{1}{2^2 + (T - \gamma)^2} \\
 &> \sum_{T < \gamma \leq T+1} \frac{1}{2^2 + 1^2} = \frac{1}{5} \sum_{T < \gamma \leq T+1} 1 = \frac{1}{5} \{N_K(T+1, \chi) - N_K(T, \chi)\}
 \end{aligned}$$

これで証明は完了した。□

補題 9 ([33] 補題 6.9 系の一般化)

$\sigma > \frac{1}{2}$, $s \neq \rho, -n, 0$ ($n = 1, 2, \dots$) とし、

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{L_K(s, \chi)} \\
 &= - \sum_{|\mu - \gamma| \leq 1} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log(2 + |t|)) + O\left(\frac{1}{\sigma^{\nu}}\right) \\
 &\hspace{15em} (\nu = 0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned}$$

証明 補題 7(i) より

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{L_K(s, \chi)} = -\frac{r_1 + r_2 - q}{s^{\nu+1}} - \frac{q}{(s+1)^{\nu+1}} - \\
 &-q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+1 - (-2n))^{\nu+1}} - \\
 &-(r_1 - q) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s - (-2n))^{\nu+1}} - r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s - (-n))^{\nu+1}} - \\
 &- \sum_{\rho} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbb{N}) \\
 &= O\left(\frac{1}{\sigma^{\nu+1}}\right) + O\left(\frac{1}{(1 + \sigma)^{\nu+1}}\right) - \\
 &-q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s + (2n + 1))^{\nu+1}} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)^{\nu+1}} - r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+n)^{\nu+1}} - \\
 & - \sum_{\rho} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbf{N}).
 \end{aligned}$$

上記右辺第3,4,5項は, $\sigma > \frac{1}{2}$ であるから, $|s+n|^{-\nu-1}$ は n について単調減少である。従って

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s+n|^{\nu+1}} \ll \\
 & \ll \int_0^{\infty} \frac{dy}{|s+y|^{\nu+1}} \\
 & = \int_0^{\infty} \frac{dy}{(\sigma^2 + 2y\sigma + y^2 + t^2)^{(\nu+1)/2}} \\
 & = \int_0^{\infty} \frac{dy}{\{(\sigma+y)^2 - \sigma^2 + |s|^2\}^{(\nu+1)/2}} \\
 & = \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dx}{\{x^2 - \sigma^2 + |s|^2\}^{(\nu+1)/2}} \\
 & = \left[\int_{\sigma}^{|s|} \frac{dx}{\{x^2 - \sigma^2 + |s|^2\}^{(\nu+1)/2}} + \right. \\
 & \quad \left. + \int_{|s|}^{\infty} \frac{dx}{\{x^2 - \sigma^2 + |s|^2\}^{(\nu+1)/2}} \right] \\
 & < \left[\int_{\sigma}^{|s|} \frac{dx}{(|s|^2)^{(\nu+1)/2}} + \int_{|s|}^{\infty} \frac{dx}{(x^2)^{(\nu+1)/2}} \right] \\
 & = \left[\frac{1}{|s|^{\nu+1}} \{ |s| - \sigma \} + \frac{1}{\nu} \frac{1}{|s|^{\nu}} \right] \\
 & \ll \frac{1}{|s|^{\nu}} \\
 & \ll \frac{1}{\sigma^{\nu}} \text{ for } \sigma > \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

第6項については, これを2つの和に分ける:

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma| \leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

この第2項を評価する:

$$\left| \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \right| \leq \sum_{|t-\gamma| > 1} \frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[(\sigma-\beta)^2 + (t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n<|t-\gamma|\leq n+1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
 &< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \sum_{n<|t-\gamma|\leq n+1} 1 \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n<\gamma-t\leq n+1} 1 + \sum_{-n-1\leq\gamma-t<-n} 1 \right) \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n+t<\gamma\leq n+1+t} 1 + \sum_{-n-1+t\leq\gamma<-n+t} 1 \right) \\
 &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) \\
 &< \sum_{n\leq|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n
 \end{aligned}$$

ここで、補題8を使った。次に $|t| \leq 1$ と $|t| > 1$ の二つの場合に分ける。
 $|t| \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log n \\
 &\ll 1.
 \end{aligned}$$

$|t| > 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) &< \sum_{n\leq|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n \ll \\
 &\ll \log 2|t| + \log 2 \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} + \sum_{n>|t|} \frac{\log n}{n^{\nu+1}} \\
 &\ll \log 2|t| + \log 2 \int_{|t|}^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu+1}} + \int_{|t|}^{\infty} \frac{\log x dx}{x^{\nu+1}} \\
 &= \log 2|t| + \frac{\log 2}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{\log |t|}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{1}{\nu^2|t|^{\nu}} \\
 &\ll \log 2(|t|+2) \quad (\text{as } \nu \rightarrow \infty).
 \end{aligned}$$

$|t| \leq 1$ と $|t| > 1$, いずれの場合も

$$\left| \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \right| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|)$$

$$\ll \log 2(|t| + 2) \quad (\text{as } \nu \rightarrow \infty).$$

以上より

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{\nu+1} L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{\nu! L_K(s, \chi)^{(\nu)}} = \\ & = O\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \\ & = - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + O\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) \\ & = - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + O(\log 2(|t| + 2)) + O\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) \end{aligned}$$

となり、補題は証明された。□

補題 10 $s = \sigma + it$, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$ を $\zeta_K(s)$ の正則点として, s に一番近い $\zeta_K(s)$ の非自明な零点は1つとして, それを $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 < \sigma$ とする ($|s - \rho| > |s - \rho_0|$)。そして $|s - \rho_0| < |s - (-n)|$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $|s - \rho_0| < \sigma \leq |s|$, $|s - \rho_0| \ll 1$ とする。このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1} L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{\nu! L_K(s, \chi)^{(\nu)}} = -\frac{1 + o(1)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}}$$

証明 補題9, $|s - \rho_0| < \sigma$, $|s - \rho_0| < |s - (-n)|$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) より

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{\nu+1} L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{\nu! L_K(s, \chi)^{(\nu)}} = \\ & = - \sum_{|t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log 2(|t| + 2)) + O\left\{\frac{1}{\sigma^\nu}\right\} \\ & = -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + O\left\{\frac{1}{\sigma^\nu}\right\} - \\ & \quad - \sum_{\rho: \rho \neq \rho_0, |t-\gamma|\leq 1} \frac{1}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log 2(|t| + 2)) \\ & = -\frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} O\left\{\frac{(s - \rho_0)^{\nu+1}}{\sigma^\nu}\right\} - \\ & \quad - \frac{1}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho: \rho \neq \rho_0, |t-\gamma|\leq 1} \frac{(s - \rho)^{\nu+1}}{(s - \rho)^{\nu+1}} + O(\log 2(|t| + 2)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(1) - \\
 &-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \sum_{\rho, \rho \neq \rho_0, |t-\gamma| \leq 1} o(1) + O(\log 2(|t|+2)) \\
 &= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \\
 &-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) + O(\log 2(|t|+2)) \\
 &\quad (\text{補題 8 を使った。}) \\
 &= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) + \\
 &+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} O((s-\rho_0)^{\nu+1} \log 2(|t|+2)) \\
 &= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} - \\
 &-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log(2+|t|)) + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} o(\log 2(|t|+2)) \\
 &= -\frac{1+o(\log 2(|t|+2))}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \\
 &= -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} \quad \text{as } \nu \rightarrow \infty \quad \square
 \end{aligned}$$

補題 11 [13], [16], [33], [41]

$c > 0, Y > 0$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{Y^w}{w^2} dw = \begin{cases} \log Y, & (1 \leq Y) \\ 0, & (0 < Y \leq 1) \end{cases}$$

補題 12 ([36] の改変)

$c > 0, X, Y > 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{X^w (Y^w - 1)}{n^{\frac{w}{\nu}} w^2 \log Y} dw = \begin{cases} 1, & (n \leq X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y} \log \left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}} \right) \leq 1, & (X^\nu \leq n \leq (XY)^\nu) \\ 0, & ((XY)^\nu \leq n) \end{cases}$$

証明 補題 11 を使えば良い。□

補題 13

実数上有界な台 $[B, C]$ を持つ複素数値関数 $f(v) = f_1(v) + if_2(v)$, $(f_1(v) := \Re f(v), f_2(v) := \Im f(v))$ の Fourier 変換 :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivx) dv \quad \dots (a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z = x + iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivz) dv \quad \dots (b)$$

は $z = x + iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。

注 この補題は、ある意味、弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明 複素解析的ならば実解析的であるから、後者を証明すれば良い。

$$F(z) = F(x + iy) = F_1(z) + iF_2(z) = F_1(x + iy) + iF_2(x + iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v) \exp(ivz) dv &= \int_B^C f(v) \exp(ivz) dv, \\ f(v) \exp(ivz) &= \{f_1(v) + if_2(v)\} \exp[iv(x + iy)] = \\ &= \{f_1(v) + if_2(v)\} e^{-vy} \{\cos(vx) + i \sin(vx)\} \\ &= \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} + i\{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} \end{aligned}$$

であり、この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} &= \int_B^C v \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \cos(vx) - f_2(v) \sin(vx)\} e^{-vy} dv, \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} &= - \int_B^C v \{f_1(v) \sin(vx) + f_2(v) \cos(vx)\} e^{-vy} dv \end{aligned}$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている), これより

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial x} &= \frac{\partial F_2}{\partial y}, \\ \frac{\partial F_1}{\partial y} &= -\frac{\partial F_2}{\partial x}\end{aligned}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

補題 14 [34]

$m \in \mathbf{N}$ として, $N(\mathbf{n}) = m$ となる整イデアル \mathbf{n} の個数を $F(m)$ で表わすと

$$F(m) := \#\{\mathbf{n} : \mathbf{n} \in I_K, N(\mathbf{n}) = m\} \leq d_n(m) \ll_\epsilon m^\epsilon$$

for any small $\epsilon > 0$.

ここで

$$d_n(m) := \sum_{m_1 \cdots m_n = m} 1.$$

注

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}\right)^n =: \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_n(l)}{l^s}, \quad \Re s > 1.$$

$d_n(m)$ は一般約数関数である。

補題 15

(i)

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^{\nu+1} L'_K(s, \chi)^{(\nu)}}{\nu! L_K(s, \chi)^{\nu}} &= \frac{1}{\nu!} \frac{d^\nu}{ds^\nu} \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} \\ &= \frac{1}{\nu!} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(\log m)^\nu}{m^s} G(m), \quad \Re s > 1, \nu = 0, 1, 2, \dots \\ \text{where } G(m) &:= \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I, N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n}),\end{aligned}$$

(ii)

$$G(m) = \begin{cases} \ll n \log m, & (m = p^e, p \text{ は有理素数}, e \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

証明 (i)

$$\begin{aligned}
 -\frac{L'_K}{L_K}(s, \chi) &= \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I, N(\mathbf{n})=m} \frac{\Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n})}{m^s} \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I, N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n}) \\
 &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} G(m)
 \end{aligned}$$

この両辺を ν ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) 回微分すれば良い。

(ii)

$$\begin{aligned}
 G(m) &= \sum_{(1)|\mathbf{n} \in I, N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n})\chi(\mathbf{n}) \\
 &\ll \sum_{\mathbf{p} \text{ は素イデアル}, l \in \mathbf{N} : N(\mathbf{p}^l)=m} \log N(\mathbf{p}) \\
 &= \sum_{\mathbf{p} \text{ は素イデアル}, l \in \mathbf{N} : N(\mathbf{p})^l=m} \log N(\mathbf{p}) \\
 &= \sum_{\mathbf{p} \text{ は素イデアル}, l \in \mathbf{N} : (p^f)^l=m} \log N(\mathbf{p}), \quad (f \text{ は } \mathbf{p} \text{ の (絶対) 次数}) \\
 &= \sum_{\mathbf{p} \text{ は素イデアル}, l \in \mathbf{N} : p^{fl}=m} \log p^f,
 \end{aligned}$$

従って $G(m) = 0$ for $m \neq p^e$, p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$.

よって $m = p^e$, p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$ のとき,

$$G(p^e) = \sum_{\mathbf{p}|(p), l \in \mathbf{N} : p^{fl}=p^e} \log p^f$$

$(p) = \mathbf{p}_1^{e_1} \cdots \mathbf{p}_k^{e_k}$, \mathbf{p}_i の (絶対) 次数を f_i , $i = 1, 2, \dots, k$ とすると

$$\begin{aligned}
 G(p^e) &= \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_i, i=1, \dots, k : p^{f_i l_i}=p^e} \log p^{f_i} \\
 &= \sum_{\mathbf{p}=\mathbf{p}_i, i=1, \dots, k : f_i l_i=e} \log p^{f_i} \\
 &= \sum_{i=1}^k \sum_{f_i|e} \log p^{f_i} \quad (f_i|e \text{ ではないときは } \sum = \phi) \\
 &\leq \sum_{i=1}^k \log p^e \\
 &\leq k \log m \ll n \log m \quad \square.
 \end{aligned}$$

補題 16

$$L_K\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \neq 0.$$

証明

関数等式

$$\begin{aligned} & A(\mathbf{m})^s \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)^q \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1-q} \Gamma(s)^{r_2} L_K(s, \chi) \\ &= W(\chi) A(\mathbf{m})^{1-s} \Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)^q \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1-q} \Gamma(1-s)^{r_2} L_K(s, \bar{\chi}) \end{aligned}$$

の両辺を対数微分すると

$$\begin{aligned} & \log A(\mathbf{m}) + \frac{q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) + \frac{r_1-q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{L'_K}{L_K}(s, \chi) \\ &= -\log A(\mathbf{m}) - \frac{q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2-s}{2}\right) - \frac{r_1-q}{2} \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s}{2}\right) - r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \\ & \quad - \frac{L'_K}{L_K}(1-s, \bar{\chi}) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & \frac{L'_K}{L_K}(s, \chi) + \frac{L'_K}{L_K}(1-s, \bar{\chi}) = \\ &= -2 \log A(\mathbf{m}) - \frac{q}{2} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{2-s}{2}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) \right] - \\ & \quad - \frac{r_1-q}{2} \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s}{2}\right) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) \right] - r_2 \left[\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) + \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) \right] \end{aligned}$$

これに $s = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} 2\Re \left\{ \frac{L'_K}{L_K}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \right\} &= \frac{L'_K}{L_K}\left(\frac{1}{2}, \chi\right) + \frac{L'_K}{L_K}\left(\frac{1}{2}, \bar{\chi}\right) = \\ &= -2 \log A(\mathbf{m}) - q \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{3}{4}\right) - (r_1-q) \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) - 2r_2 \frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{2}\right) \neq \infty \end{aligned}$$

となるので $L_K\left(\frac{1}{2}, \chi\right) \neq 0$. \square

主定理 1 の証明

以降, $o(\cdot)$, $O(\cdot)$, \ll , \sim 等の記号は $\nu \rightarrow +\infty$ のときを考えている。

$s = \sigma + it, \frac{1}{2} < \sigma < 1, \nu \in \mathbb{N}, 1 \ll \nu, X, Y > 1, \delta > 1$ として次の積分を考える：

$$I_\nu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{(-1)^{\nu+1} L'_K}{\nu! L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)dw}{w^2 \log Y}$$

$(\frac{1}{2} < \sigma < 1, w = u + iv).$

ここで、後に $X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \beta_0}\right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0}, \delta > 1$ [42] とする。 δ は後に決める。

補題12,15を使うと、この積分 I_ν は

$$I_\nu = \frac{1}{\nu!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s} \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{X^w(Y^w - 1)}{n^{w/\nu}} \frac{dw}{w^2 \log Y}$$

$$= \frac{1}{\nu!} \sum_{n \leq (XY)^\nu} \frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s} \alpha_n,$$

$$\text{where } \alpha_n := \begin{cases} 1 & , (n \leq X^\nu) \\ \frac{1}{\log Y} \log\left(\frac{XY}{n^\nu}\right) \leq 1 & , (X^\nu \leq n \leq (XY)^\nu) \\ 0 & , ((XY)^\nu \leq n) \end{cases}$$

... (1)

となる。ここで、

$$(-1)^{\nu+1} \frac{L'_K}{L_K}(s, \chi)^{(\nu)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{G(n)(\log n)^\nu}{n^s} \quad (\sigma > 1)$$

である。

ここで積分路を次の $L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである： $A > 1$ として

$$L = L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5$$

$$L_1 = [\nu - i\infty, \nu + i\nu(V_m^- - t)],$$

$$L_2 = [\nu + i\nu(V_m^- - t), -A + i\nu(V_m^- - t)],$$

$$L_3 = [-A + i\nu(V_m^- - t), -A + i\nu(V_m^+ - t)],$$

$$L_4 = [-A + i\nu(V_m^+ - t), \nu + i\nu(V_m^+ - t)],$$

$$L_5 = [-\nu + i\nu(V_m^+ - t), \nu + i\infty].$$

留数定理により,

$$\begin{aligned}
 I_\nu &= \operatorname{Res}_{w=0} \left\{ \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} (s, \chi)^{(\nu)} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &= -\frac{1 + o(1)}{(s - \rho_0)^{\nu+1}} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで、補題 10 を使った。また、 $\nu \gg 1$ であるので $\frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu} \right)$ の特異点 $w = \nu(\rho - s)$, $\nu(0 - s)$ は $\Re \nu(\rho - s) < -A$, $\Re \nu(0 - s) < -A$ となり、積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w = \nu(\rho - s)$, $\nu(0 - s)$ は存在しない。

次に (2) の 5 つの積分を上から評価する。
 積分路 L_1 上では、補題 15 より

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \int_{\nu - i\infty}^{\nu + i\nu(V_m^{-t})} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{L'_K}{L_K} (\sigma + 1, \chi)^{(\nu)} \right| \frac{(XY)^\nu}{|w|^2} dw \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^{\sigma+1}} \int_0^\infty \frac{dw}{|w|^2} \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{n(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma+1}} \int_0^\infty \frac{dw}{|w|^2} \\
 &\ll n \frac{(XY)^\nu}{\nu!} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma+1}} \int_0^\infty \frac{dw}{|w|^2} \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!} (\nu + 1)! \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\nu+2} \int_0^\infty \frac{dv}{\nu^2 + v^2} \\
 &= \frac{(XY)^\nu}{\nu \nu!} (\nu + 1)! \left(\frac{1}{\sigma} \right)^{\nu+2} \int_0^\infty \frac{dy}{1 + y^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (XY)^\nu \frac{\nu+1}{\nu} \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \left(\frac{\pi}{2}\right) \\
 &\ll (XY)^\nu \left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2} \\
 &\ll \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma} \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu \quad \dots (3)
 \end{aligned}$$

となる。ここで補題2を使った。

積分路 L_5 上でも同様に

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_5} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma} \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\right)^\nu \quad \dots (3')
 \end{aligned}$$

積分路 L_2 上では

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_2} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \frac{1}{\log Y} \int_{\nu+i\nu(V_m^- - t)}^{-A+i\nu(V_m^- - t)} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{L'_K}{L_K} \left(\sigma + it + \frac{u}{\nu} + \frac{i}{\nu} \nu(V_m^- - t), \chi\right)^{(\nu)} \right| \times \\
 &\quad \times \frac{(XY)^\nu}{|i\nu(V_m^- - t)|^2} du \\
 &\ll \frac{1}{\log Y} \int_{\nu}^{-A} \frac{1}{\nu!} \left| \frac{L'_K}{L_K} \left(\sigma + \frac{u}{\nu} + iV_m^-, \chi\right)^{(\nu)} \right| \frac{(XY)^\nu}{|\nu(V_m^- - t)|^2} du \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y} \int_{\nu}^{-A} \frac{1}{(U_m)^{\nu+1} \nu^2} du \\
 &\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y} (A + \nu) \frac{1}{\nu^2 (U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu \quad \dots (4)
 \end{aligned}$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi i} \int_{L_4} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 &\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)}{U_m}\right)^\nu \quad \dots (4')
 \end{aligned}$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。 $B \gg 1$ として積分路 L_3 を3つ：

$$L_{3,1} := [-A + i\nu(V_m^- - t), -A - iB],$$

$$L_{3,2} := [-A - iB, -A + iB],$$

$$L_{3,3} := [-A + iB, -A + i\nu(V_m^+ - t)],$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}$$

に分けて評価する。 A の値は後に決めるが、その A の値に対して B を定める。

さて

$$\left(s - \rho_0 + \frac{-A + i\nu}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

を考える。

仮定している $s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0)(1 + iO(\frac{1}{\nu^2}))$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$\begin{aligned} & \left\{ \left(s - \rho_0 + \frac{-A + i\nu}{\nu}\right) \right\}^{\nu+1} \\ &= \left\{ (\sigma - \beta_0) + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) + \frac{-A + i\nu}{\nu} \right\}^{\nu+1} \\ &\sim \left\{ (\sigma - \beta_0) + \frac{-A + i\nu}{\nu} \right\}^{\nu+1} \\ &= (\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left(1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right)^{\nu+1}, \end{aligned}$$

$$\left\{ 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)}$$

は $|v| \leq B$ のとき、

$$\begin{aligned} & \left\{ 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\exp\left(\frac{-A + i\nu}{\sigma - \beta_0}\right)} \\ &= (1 + o(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{\nu}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

であり $|v| \geq B$ のときは、

$$\left| 1 + \frac{-A + i\nu}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| 1 + \frac{-A}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)} \left| 1 + i \frac{v/\{\nu(\sigma - \beta_0)\}}{1 + \frac{-A}{\nu(\sigma - \beta_0)}} \right|^{-(\nu+1)} \\
 &\sim \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \left| 1 + i \frac{v}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right|^{-(\nu+1)} \\
 &\leq \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)
 \end{aligned}$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,3}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+ - t)} \left| \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+ - t)} \left| \frac{1 + o(1)}{(s + \frac{w}{\nu} - \rho_0)^{\nu+1}} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - t)} \frac{1 + o(1)}{\left|s - \rho_0 + \frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - t)} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left|1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma - \beta_0)}\right|^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \int_B^{\nu(V_m^+ - t)} \frac{(1 + o(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A} dv}{(A^2 + v^2) \log Y} \\
 &\leq \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \int_B^{\nu(V_m^+ - t)} \frac{dv}{(A^2 + v^2)} \\
 &< \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \int_B^\infty \frac{dv}{(A^2 + v^2)} \\
 &= \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \int_{\frac{B}{A}}^\infty \frac{dy}{(1 + y^2)} \\
 &= \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \left\{ \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \right\} \\
 &\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma - \beta_0}\right) \\
 &= \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y} \\
 &\dots (5)
 \end{aligned}$$

ここで $w \in L_{3,3}$ であるから, $w = -A + iv = -A + iv(y - t)$,
 $B \leq v \leq \nu(V_0^+ - t)$ より

$$\begin{aligned} s + \frac{w}{\nu} &= \sigma + it + \frac{-A + iv(y - t)}{\nu} \\ &= \left(\sigma - \frac{A}{\nu}\right) + iy \quad \left(\frac{B}{\nu} + t \leq y \leq V_0^+\right). \end{aligned}$$

従つて, $\rho \neq \rho_0$ なる ρ に対して $w \in L_{3,3}$ であるとき

$$\left|s + \frac{w}{\nu} - \rho\right| > \left|s + \frac{w}{\nu} - \rho_0\right|$$

となるので補題 12 を使つたことに注意すべきである。

$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,1}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-A+iv(V_m^- - t)}^{-A-iB} \left| \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \right| \frac{X^{-A} dw}{|w|^2 \log Y} \\ &\ll \frac{1}{2\pi \log Y} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \frac{X^{-A}}{A} \exp\left(\frac{-A}{\sigma - \beta_0}\right) \\ &= \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \frac{X^{-A}}{2\pi A \log Y} \\ &\dots (5') \end{aligned}$$

となる。

最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w(Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw$$

について詳述する：

$|v| \leq B$ のとき,

$$\begin{aligned} &\left\{ 1 + \frac{-A + iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\ &= \frac{1 + o(1)}{\exp\left(\frac{-A + iv}{\sigma - \beta_0}\right)} \\ &= (1 + o(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \end{aligned}$$

であるが、これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)} \ll 1$ であるので

$$\begin{aligned}
 & \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-(\nu+1)} \\
 &= \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-1} \exp \left[(-\nu) \log \left(1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right) \right] \\
 &= \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-1} \times \\
 & \times \exp \left[(-\nu) \left\{ \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} - \frac{1}{2} \left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right)^2 + \dots \right\} \right] \\
 &= \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-1} \times \\
 & \times \exp \left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)} + \frac{1}{2\nu} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^2 - \frac{1}{3\nu^2} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^3 + \dots \right] \\
 &= \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-1} \exp \left(\frac{A}{\sigma-\beta_0} \right) \exp \left(-i \frac{v}{\sigma-\beta_0} \right) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{1}{2\nu} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^2 - \frac{1}{3\nu^2} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^3 + \dots \right] \\
 &= \left\{ 1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)} \right\}^{-1} \exp \left(\frac{A}{\sigma-\beta_0} \right) \exp \left(-i \frac{v}{\sigma-\beta_0} \right) \times \\
 & \times \exp \left[\frac{1}{\nu} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^2 - \frac{1}{3\nu} \left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)} \right)^3 + \dots \right\} \right] \\
 &= \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{\nu} \right) \right\} \exp \left(\frac{A}{\sigma-\beta_0} \right) \exp \left(-i \frac{v}{\sigma-\beta_0} \right) \times \\
 & \times \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{\nu} \right) \right\} \\
 &= \left\{ 1 + O \left(\frac{1}{\nu} \right) \right\} \exp \left(\frac{A}{\sigma-\beta_0} \right) \exp \left(-i \frac{v}{\sigma-\beta_0} \right) \\
 &= (1 + o(1)) \exp \left(\frac{A}{\sigma-\beta_0} \right) \exp \left(-i \frac{v}{\sigma-\beta_0} \right)
 \end{aligned}$$

である。このことを使って

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv} - 1)dw}{w^2 \log Y} \\
 &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{1 + o(1)}{\left(s + \frac{w}{\nu} - \rho_0 \right)^{\nu+1}} \frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv} - 1)dw}{w^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-B}^B \frac{1 + o(1)}{\left(s - \rho_0 + \frac{-A+iv}{\nu} \right)^{\nu+1}} \frac{X^{-A+iv}(1 - Y^{-A+iv})dv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-B}^B \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1} \left(1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma - \beta_0)} \right)^{\nu+1}} \frac{X^{-A+iv}(1 - Y^{-A+iv})dv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \times \\
 &\quad \times \int_{-B}^B \frac{\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A+iv}(1 - Y^{-A+iv})dv}{(-A + iv)^2 \log Y} \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 &\quad \times \int_{-B}^B \frac{\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) dv \\
 &\quad \dots (*)
 \end{aligned}$$

(*) の右辺の積分を

$$\begin{aligned}
 F_\nu(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 &\quad \times \int_{-B}^B \frac{\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) dv
 \end{aligned}$$

と置いて

$$\begin{aligned}
 F(X) &:= \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\
 &\quad \times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) dv
 \end{aligned}$$

とする。

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{\left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \right\} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) \right| \\
 &\leq \frac{2}{(A^2 + v^2) \log Y}
 \end{aligned}$$

をみだし,

$$\frac{2}{(A^2 + v^2) \log Y}$$

は可積分 integrable であるので

Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X)$$

である。また補題 15 より

$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X = 0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\ \times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) dv$$

は $X = 0$ を除いて $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu \gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K}\left(s + \frac{w}{\nu}, \chi\right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\ = \frac{1}{2\pi i} \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} F_\nu(X) \quad \text{with} \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X)$$

で $F(X)$ は $X > 0$ で実解析的で ν に依存しない
複素数値実解析関数である。

... (6)

(1), (2), (3), (3'), (4), (4'), (5), (5'), (6) を使うと

$$I_\nu \equiv \\ = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \\ = -\frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} +$$

$$\begin{aligned}
 &+ O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(Y \frac{\exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)}{U_m} \right)^\nu \right\} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,2}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw,
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,3}} \right\} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw - \\
 & - \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left(\frac{1}{2} \right) + \\
 & + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!} \frac{L'_K}{L_K} \left(s + \frac{w}{\nu}, \chi \right)^{(\nu)} \frac{X^w (Y^w - 1)}{w^2 \log Y} dw \\
 & = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\
 & + O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(Y \frac{\exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)}{U_m} \right)^\nu \right\}
 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y} \right) \right\} - \\
 & - \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \\
 & = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\
 & + O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(Y \frac{\exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)}{U_m} \right)^\nu \right\}
 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow \clubsuit$

を得る。ここで上記左辺の第1項：

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y} \right) \right\}$$

が

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y} \right) \right\} > \frac{1}{4}$$

であるように $A > 1$, $Y > 1$ を選び (実際の A, B の選び方は第1番目に上記のように A を選び, 第2番目に B を選ぶ), そして

$$\left\{ \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right\}$$

に関して

$$\alpha := \left\{ \left(\frac{1}{2} \right) + O \left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y} \right) \right\} + \left(\frac{1}{2} \right) > \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

と置き (α が X に依存しないように A を定めることが出来ることに注意すべきである。)

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0$$

となるよう

$$X = \exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0}, \quad \delta > 1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと, 定数 constant でないこと (注) から可能である。また上記

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。

従って上記 ♣ は

♣ \iff

$$\begin{aligned} & - \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \\ & = \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m + \\ & + O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right) \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(Y \frac{\exp \left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}} \right)}{U_m} \right)^\nu \right\} \end{aligned}$$

$$\text{with } \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0$$

... (7)

となる。

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} F_\nu(X) = F(X)$$

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \neq 0$$

より、即ち

$$\left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \rightarrow \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| > 0 \text{ as } \nu \rightarrow \infty$$

より、十分小さい正数 $0 < \epsilon_0 \ll 1$ を

$$0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0$$

を満たすように選ぶと十分大きい $\nu \gg 1$ に対して

$$0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| < \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| + \epsilon_0$$

... (**)

となる。

上記 (7) の左辺の絶対値の $\frac{1}{\nu}$ 乗平均値積分を考えるが, (**) と補題 1 から

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} dt \\ & \leq \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left\{ \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right| \right\}^{\frac{1}{\nu}} dt \\ & \leq \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \alpha - \frac{1}{2\pi i} F_\nu(X) \right\} \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| O \left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} + O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\ & \leq \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left(\left| O \left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} \right| + \left| O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} \right| \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left[\frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right]^2 dt \Big]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \leq \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} O \left(\left| O \left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right\} \right|^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| O \left\{ \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right\} \right|^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| O \left\{ \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right\} \right|^2 \right) dt \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \leq \left[\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} O \left(\left| \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right|^2 + \left| \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right|^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right|^2 \right) dt \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \leq \left[O \left\{ \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right|^2 dt + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right|^2 + \left| \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \leq \left[O \left\{ \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right|^2 dt + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left| \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^\nu \right|^2 + \left| \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^\nu \right|^2 \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \dots (8)
 \end{aligned}$$

を得る。ここで $a, b, c, d \geq 0$ に対して $(a+b+c+d)^2 \leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ であることを使った。

(8) の右辺の積分に対して補題3を使うと

$$\frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} dt$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left[O \left\{ \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1}{\nu!} \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s} \alpha_m \right|^2 dt + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 &= \left[O \left\{ \left(\frac{1}{\nu!} \right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + O \left(\frac{(XY)^\nu}{h} \left(\frac{1}{\nu!} \right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 \right) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 &= \left[O \left\{ \frac{(XY)^\nu}{h} \left(\frac{1}{\nu!} \right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \dots (9)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sigma - \beta_0} = \\
 &\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{1}{2h} \int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h} \left| \frac{1 + o(1)}{(\sigma - \beta_0)^{\nu+1}} \left\{ \left| \alpha - \frac{1}{2\pi i} F(X) \right| - \epsilon_0 \right\} \right|^{\frac{1}{\nu}} dt \\
 &\leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[O \left\{ \frac{(XY)^\nu}{h} \left(\frac{1}{\nu!} \right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 &\quad \dots (10)
 \end{aligned}$$

(10) の右辺の第1項を補題2を使って評価する：

$$\begin{aligned}
 & \frac{(XY)^\nu}{h} \left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 \\
 & \ll \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} \left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \\
 & \ll \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} \left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{n^2 (\log m)^{2\nu+2}}{m^{2\sigma}} \\
 & \ll \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} \left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 (2\nu+2)! \left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3} \\
 & \ll \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2} \times \\
 & \quad \times (2\nu+2)(2\nu+1) \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3} \\
 & < \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} (2\nu+2)(2\nu+1) \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3} \\
 & \quad \dots(11)
 \end{aligned}$$

(10) に(11)を代入して、補題4を使うと：

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{|\sigma - \beta_0|} \leq \\
 & \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[O \left\{ \frac{(XY)^\nu}{h} \left(\frac{1}{\nu!}\right)^2 \sum_{m \leq (XY)^\nu} \frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}} (\log m)^{2\nu} \alpha_m^2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & \leq \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[O \left\{ \exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) Y^\nu \frac{\nu^2}{\sigma - \beta_0} (2\nu+2)(2\nu+1) \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3} + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}})}{U_m} \right)^{2\nu} + \left(\frac{Y}{\sigma} \exp(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}) \right)^{2\nu} \right\} \right]^{\frac{1}{2\nu}} \\
 & = \max \left\{ Y \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \left(\frac{1}{\sigma - \frac{1}{2}}\right), \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right), \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma} \right) \Big\} \\ &= \max \left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}} \right), \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right) \right\} \\ & \dots (12) \end{aligned}$$

(12) で $\sigma - \beta_0 > 0$ を保ちながら, σ を β_0 に十分近づければ, $\beta_0 > \frac{1}{2}$ であるので, (12) の左辺は ∞ に近づき, 一方 (12) の右辺は

$$\max \left\{ \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}} \right), \left(Y \frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m} \right) \right\} \Big|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$, $\beta_0 > \frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $L_K(s, \chi)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注： $F(X)$ が定数でないことの証明

$$\begin{aligned} G(z) &:= F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) X^{-A} \times \\ &\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2 \log Y} \exp(iv \log X) dv \\ &= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times \\ &\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)^2} \exp((-A + iv)z) dv \end{aligned}$$

with $z := \log X$

$G(z) = \text{constant}$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} G(z) &= \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times \\ &\times \int_{-B}^B \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv})}{(-A + iv)} \exp((-A + iv)z) dv \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} G(z) &= \frac{\exp\left(\frac{-A}{\sigma - \beta_0}\right)}{\log Y} \times \\ &\times \int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp((-A + iv)z) dv \\ &= 0 \end{aligned}$$

⇒

$$\int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp((-A + iv)z) dv = 0$$

⇒

$$\int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) (1 - Y^{-A+iv}) \exp(ivz) dv = 0$$

⇒

$$\begin{aligned} &\int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \exp(ivz) dv \\ &= \int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) Y^{-A+iv} \exp(ivz) dv \\ &= Y^{-A} \int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz) dv \end{aligned}$$

⇒

$$\begin{aligned} &\int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) \exp(ivz) dv \\ &= Y^{-A} \int_{-B}^B \exp\left(-i \frac{v}{\sigma - \beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz) dv \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & Y^A \int_{-B}^B \exp \left\{ iv \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} dv \\ &= \int_{-B}^B \exp \left\{ iv \left(\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} dv \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & Y^A \left[\frac{\exp \left\{ iv \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{i \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right)} \right]_{v=-B}^B \\ &= \left[\frac{\exp \left\{ iv \left(\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{i \left(\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right)} \right]_{v=-B}^B \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} \\ &= \frac{\sin \left\{ B \left(\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} = \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) + B \log Y \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + \log Y} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow

$$\begin{aligned} & Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} \\ &= \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \cos(B \log Y) + \cos \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \sin(B \log Y)}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + \log Y} \end{aligned}$$

ここで, $\log Y = 2\pi$, $B \in \mathbf{N}$ とすると

\Leftrightarrow

$$Y^A \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}} = \frac{\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + 2\pi}$$

$\sin \left\{ B \left(\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} \right) \right\} \neq 0$ であるので
 \Leftrightarrow

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma - \beta_0} + 2\pi} = \frac{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X - 2\pi}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X \gg 1$ であるが、 $A \gg 1$ であるので

\Leftrightarrow

$$1 \ll e^{2\pi A} = \frac{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma - \beta_0} - \log X - 2\pi} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi}$, $1 \ll B \in \mathbb{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq \text{constant}$. \square

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ の選び方

$X = \exp\left\{\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right\}$, $Y = e^{2\pi}$, $A, B \in \mathbb{N}$, $\sigma - \beta_0$ は次の条件 (a), (b), (c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi} \exp\left\{\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right\}} \dots (a)$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma - \beta_0}\right) \dots (b)$$

$$\frac{1}{2} + O\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) = \frac{1}{2} + O\left(\frac{X^{-A}}{A}\right) > \frac{1}{4} \dots (c)$$

満たすが、先ず (a) を満たすように $\sigma - \beta_0$ を選び、次に (c) を満たすように A を選んでから、(b) を満たすように B を選ぶ。

注意 1 : 主定理 1 を繰り返し適用すると、

$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり、
非零領域 zero free region :

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma, C_{m-1} < t < C_m\}$$

は、左方向に広がって行き、遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma, C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。

主定理は次の結論を導いている。即ち、存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず、 $\frac{1}{2} < \sigma$ となる $L_K(s, \chi)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば、結局 $L_K(s, \chi)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。

$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので、この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。

注意 2: $\log L_K(s, \chi)$ が Dirichlet 級数に展開出来る事、即ち $L_K(s, \chi)$ が Euler 積を持つ事が重要である。従って、一般に Euler 積 product を持つ zeta 関数 or L -関数に対しても、この論文の議論は適用出来るはずである。

参考文献

- [1] Chandrasekharan, K.: *Arithmetical Functions*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1970.
- [2] Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1980. (1st ed. Markham, 1967.)
- [3] 土井公二 Doi, K., 三宅敏恒 Miyake, T. : 『保型形式と整数論』 紀伊國屋書店, 1976. *Modular Forms and Number Theory* (in Japanese), Kinokuniya-shoten, Tokyo, 1976.
- [4] 藤崎源二郎 Fujisaki, G. 森田康夫 Morita, Y. 山本芳彦 Yamamoto, Y.: 『数論への入門』, 日本評論社, 1980. *Introduction to Number Theory* (in Japanese), Nihon-Hyouron-sha, Tokyo, 1980.
- [5] Goldstein, L. J.: *Analytic Number Theory*, Prentice-Hall, 1971.

- [6] Iwaniec, H.: *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Math. Soc., 1997.
- [7] Iwaniec, H. and Kowalski, E.: *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., 2004.
- [8] 河田敬義 Kawada, Y.: 『数論 I, II, III』岩波書店, 1978.
Number Theory, Iwanami-shoten, Tokyo, 1978.
- [9] 木田雅成 Kida, M.: 『数理・情報のための数論講義』サイエンス社, 2007. *Lectures on Number Theory for Mathematical or Information Science*, Science-sha, Tokyo, 2007.
- [10] Koch, H.: *Introduction to Classical Mathematics I*, Kluwer Academic Publisher, 1991. (translated by Stillwell, D. from *Einführung in die Klassische Mathematik I*, Akademie-Verlag, Berlin, 1986.)
- [11] Koch, H.: *Number Theory: Algebraic Numbers and Functions*, Amer. Math. Soc., 2000. (translated by Kramer, D. from the German ed. Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.)
- [12] Kowalski, E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.
- [13] Landau, E.: *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909. § 87, 88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]
- [14] Landau, E.: *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Teubner, Leipzig, 1918. [Reprint: Chelsea, New York, 1949.]
- [15] Lang, S.: *Algebraic Number Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1986.
- [16] 三井孝美 Mitsui, T.: 『整数論：解析的整数論入門』至文堂, 1970.
Number Theory: Introduction to Analytic Number Theory (in Japanese), Shibundo, Tokyo, 1970.

- [17] 三井孝美 Mitsui, T.: 『解析的数論』岩波書店, 1989.
Analytic Number Theory (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1989.
- [18] Miyake, T. : *Modular Forms*, Springer, 1989.(translation of [3])
- [19] 森田康夫 Morita, Y.: 『整数論』東京大学出版会, 1999.
Number Theory (in Japanese), Univ. of Tokyo Press, 1999.
- [20] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: ある平均値積分 A Mean Value Integral, 鹿児島経済論集, 第 59 巻 1 号, 2018 年 10 月, 1-31, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, October 2018, 1-31.
- [21] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: ある平均値積分 (II) A Mean Value Integral(II), 鹿児島経済論集, 第 59 巻 2 号, 2018 年 12 月, 141-154, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, December 2018, 141-154.
- [22] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集, 第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 61-76.
- [23] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: 不完全 Gamma 関数の漸近公式 Asymptotic Formula of the Incomplete Gamma Function, 鹿児島経済論集, 第 60 巻 4 号, 2020 年 3 月, 555-560, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this volume), March 2020, 555-560.
- [24] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: ある平均値積分 (III:補遺); 実軸上或いは実軸近くの零点, A Mean Value Integral(III:Appendix) ; Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Riemann Zeta-Function, 鹿児島経済論集, 第 60 巻 3 号, 2019 年 12 月, 265-303, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this volume), December 2019, 265-303 .
- [25] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Dirichlet の L 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Dirichlet's L -Functions, 鹿児島経済論集, 第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 21-60, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 21-60.
- [26] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Dirichlet の L 関数の Landau-Page-Siegel-龍沢零点, Landau-Page-Siegel-Tatuzawa's Zeros of Dirichlet's L -

- Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻2号, 2019年9月, 153-193, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, September 2019, 153-193.
- [27] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Ramanujan の L_τ 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Ramanujan's L_τ -Function, 鹿児島経済論集, 第60巻2号, 2019年9月, 195-240, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, September 2019, 195-240.
- [28] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: 尖点形式 f に付随する L_f -関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f -Function associated with cusp form f , 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 305-350, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, December 2019, 305-350.
- [29] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Maass 尖点形式 f に付随する L_f -関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f -Function associated with Maass cusp form f , 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 351-405, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, December 2019, 351-405.
- [30] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Dedekind の Zeta 関数の実軸から「離れている」非自明な零点, Non-Trivial Zeros that are “not near” the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 407-451, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, December 2019, 407-451.
- [31] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Dedekind の Zeta 関数の実軸上或いは実軸に近い非自明な零点, Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻4号, 2020年3月, 561-606, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, March 2020, 561-606.
- [32] 中嶋眞澄 Nakajima, M.: Hecke の量指標を持つ L -関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L -Functions with Hecke's Grössencharakter, 鹿児島経済論集, 第60巻4号, 2020年3月, 653-698, *The Kagoshima Journal of Economics*, 60, March 2020, 653-698.
- [33] Narkiewicz, W.: *The Development of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳: 中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』, 丸善出版, 訂正版 2014, 2012, 『素数定理の進展・下』, 丸善出版, 2013)

- [34] Narkiewicz, W.: *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. (originally published by PWN(Polish Sci. Publ.), Warszawa, 1974.)
- [35] Neukirch, J.: *Analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. (邦訳：梅垣敦紀 訳『代数的整数論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003.)
- [36] Selberg, A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.
- [37] Siegel, C.L.: *Analytische Zahlentheorie*, Lecture Notes, Univ. of Göttingen, 1963/64.
(邦訳：片山孝次 訳『解析的整数論 I, II』, 岩波書店, 2018)
- [38] 末綱恕一 Suetuna, Z.: 『整数論及代数学』新修最近高等数学講座第16巻, 共立社, 1935. *Number Theory and Algebra* (in Japanese), Kyouritsu-Sha, Tokyo, 1935.
- [39] 末綱恕一 Suetuna, Z.: 『解析的整数論』岩波書店, 1950. (1934 岩波数学講座の一巻として出版) *Analytic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1950. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)
- [40] 高木貞治 Takagi, T.: 『代数的整数論 第2版』岩波書店, 1971. (1935 岩波数学講座の一巻として出版) *Algebraic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1971. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)
- [41] 龍沢周雄 Tatzawa, T.: 『関数論』共立出版, 共立全書 233, 1980. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.
- [42] Temme, N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.
- [43] Terras, A.: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces —Euclidean Space, the Sphere, and the Poincaré Upper Half Plane—*, 2nd ed., Springer, 2013, (1st ed., 1985).

- [44] Titchmarsh, E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown, D.R., 1986.]
- [45] 辻正次 Tsuji, M.: 『複素函数論』, 槇書店, 1968. *Complex Function Theory* (in Japanese), Maki-Shoten, Tokyo, 1968.
- [46] 山口周 Yamaguchi, I.: 『整数論—美しき円分体論・ベルヌーイ数への旅路—』 産業図書, 1994. *Number Theory — A Journey to Beautiful Cyclotomic Field Theory and Bernoulli Numbers—*, Sangyo-Tosho, Tokyo, 1994.

(received 4 November 2019.)