DedekindのZeta関数の実軸上或いは実軸に近い非自明な零点

Non-Trivial Zeros that are near or on the Real Axis of the Dedekind Zeta-Functions

中嶋眞澄
Masumi NAKAJIMA
Department of Economics
International University of Kagoshima
Kagoshima 891-0197, JAPAN
e-mail: nakajima@eco.iuk.ac.jp

概 要

Abstract

We study here non-trivial zeros that are near or on the real axis of the Dedekind Zeta-functions.

Key words ; the Dedekind Zeta-function.
Mathematics Subject Classification 2010; 11S40.

Kを$\mathbf{Q}$(有理数体)上n次の代数体 ($n = [K : \mathbf{Q}]$), $O := O_K$をKの整数環とする。Oの部分集合である(整)イデアルをアルファベット小文字太字で$\mathbf{a}, \mathbf{p}, \cdots$等と表わす。$K$の整イデアル全体を$I := I_K$と表わす。また，$K$の部分集合$\mathbf{c}$に対して$^{\exists}x \in O \backslash \{0\}$が存在して$x\mathbf{c} \in I_K$となると

き $\mathbf{c}$ を K の分数イデアルという。K の分数イデアル全体を $J := J_K$ で表わす。

$\mathbf{n} \in I_K\backslash\{0\}$ のノルムを $N(\mathbf{n}) := \sharp(O/\mathbf{n})$ で与える。I_K の部分集合で素イデアル全体の集合を $P := P_K$ で表わす。Dedekind の zeta 関数を次で定義する：

$$\zeta_K(s) := \zeta_K(\sigma + it) := \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I_K} \frac{1}{N(\mathbf{n})^s}, \quad \Re s > 1 \quad (s \in \mathbf{C},\ (1) = O_K\ ).$$

$\zeta_K(s)$ は次の性質を持つ。

(i) 上記 $\zeta_K(s)$ の右辺は $\Re s > 1$ で絶対収束する。又この範囲で Euler 積：

$$\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I_K} \frac{1}{N(\mathbf{n})^s} = \prod_{\mathbf{p}\in P_K} \frac{1}{1 - N(\mathbf{p})^{-s}}, \quad \Re s > 1$$

を持つので，この範囲には零点，極を持たない。

(ii) $\zeta_K(s)$ は $\mathbf{C}$ 全体に解析接続され，$s = 1$ に1位の極を持つ以外，正則である。$s = 1$ での留数は

$$\operatorname*{Res}_{s=1} \zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}}{w_K\sqrt{|d_K|}} h_K R_K.$$

ここで r_1 は K の実共役体の個数，r_2 は K の複素共役体の個数の半分：$r_2 = \frac{1}{2}(n - r_1)$ で，w_K は K が含む1の冪根の個数，d_K は K の判別式，h_K は K の類数，R_K は K の単数基準である。

(iii)

$$\begin{aligned}\Theta_K(s) &:= \left(\frac{\sqrt{|d_K|}}{2^{r_2}\pi^{\frac{n}{2}}}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s) \\ &=: A(1)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)\end{aligned}$$

と置くと関数等式 funtional equation:

$$\Theta_K(s) = \Theta_K(1 - s)$$

を満たすので，$0 < \Re s < 1$ 内の $\zeta_K(s)$ の非自明な零点以外の零点は $s = -1, -3, -5, \cdots$ で r_2 位の零点を，$s = -2, -4, -6, \cdots$ で $r_1 + r_2$ 位の零点を持つ。又，上記関数等式と $\zeta_K(s)$ は $s = 1$ で1位の極を持つ事より $s = 0$ は $r_1 + r_2 - 1$ 位の零点であり

$$\lim_{s\to 0} \frac{\zeta_K(s)}{s^{r_1+r_2-1}} = (-1)\frac{h_K R_K}{w_K}, \quad [14]$$

となる。これらの零点を自明な零点 trivial zeros と云う。$s=0$ を除いて $\Re s = 0, 1$ には零点が存在しない事が知られている。
次の定理を証明する：

主定理 1　$m \in \mathbf{Z}$ を一つ固定し，$C_m = m$ (or $m+\frac{1}{2}$) とする。また，以下の σ も次の条件を満たすものを一つ固定 fixed する。$\frac{1}{2} < \sigma < 1$, $\nu \gg 1$ は十分大きい自然数とする。又，$C_{m-1} < t < C_m$ とする。

$\zeta_K(s)$ の非自明な零点 *non-trivial zero*: $\rho_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ ($\gamma_0 = 0$ も含める *including*) を，

$$\beta_0 := \max\{\beta > \frac{1}{2} \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \zeta_K(\rho) = 0,\ C_{m-1} < \gamma < C_m\}$$

で定義する。従って，領域 $\{w = u + iv \mid \beta_0 < u,\ C_{m-1} < v < C_m\}$ は非零領域 *zero free region* となる。
ρ_+, ρ_-, $\beta_+ > \frac{1}{2}$, $\beta_- > \frac{1}{2}$, γ_+, γ_-, U_m^+, U_m^-, U_m, V_m^+, $V_m^- > 0$
を次で定義する。

$$\begin{aligned}
\rho_+ &= \beta_+ + i\gamma_+,\ \zeta_K(\rho_+) = 0 \\
&\quad \gamma_+ := \min\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta_K(\rho) = 0,\ \gamma_0 < \gamma\} \\
\rho_- &= \beta_- + i\gamma_-,\ \zeta_K(\rho_-) = 0 \\
&\quad \gamma_- := \max\{\ \gamma \mid \rho = \beta + i\gamma,\ \beta > \frac{1}{2},\ \zeta_K(\rho) = 0,\ \gamma < \gamma_0\} \\
U_m^+ &:= \min\{\gamma_0 + \frac{1}{2}(\gamma_+ - \gamma_0),\ C_m\} \\
U_m^- &:= \max\{\gamma_0 - \frac{1}{2}(\gamma_0 - \gamma_-),\ C_{m-1}\} \\
U_m &:= \frac{1}{2}\min\{|U_m^+ - \gamma_0|,\ |U_m^- - \gamma_0|,\ 1\ \} \\
V_m^+ &:= \gamma_0 + U_m \\
V_m^- &:= \gamma_0 - U_m
\end{aligned}$$

ρ_0 の左側：$\Im\rho = \gamma_0$, $\zeta_K(\rho) = 0$ なる零点 ρ を右から順番に

$$\rho_1 := \beta_1 + i\gamma_0,\ \rho_2 := \beta_2 + i\gamma_0, \cdots$$

$$(\frac{1}{2} < \cdots < \beta_2 < \beta_1 < \beta_0,\ \zeta_K(\rho_i) = 0,\ \Im\rho_i = \gamma_0,\ i = 1, 2, \cdots)$$

とする (ρ_1, ρ_2, $\cdots$ が存在しない場合もある。このときは $\beta_1 = \frac{1}{2}$ とする。)。
注 $\{w = u + iv \mid \frac{1}{2} < u,\ U_{m-1}^- \le v \le U_m^+,\ v \ne \gamma_0\}$ は非零領域 *zero free region* である。
σ, $s = \sigma + it$, $h := \frac{1}{\nu^2}(\sigma - \beta_0)$, t, $Y > 1$, $\delta > 1$ を

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \min\left\{\frac{\sigma - \frac{1}{2}}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})},\ \frac{U_m}{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})},\ \frac{1-\sigma}{Y^{2c}\exp(\frac{6c\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}\right\}$$

$\cdots(*)$, c は後出

$$\gamma_0 - h \le t \le \gamma_0 + h$$

(これより,

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\nu^4}(\sigma-\beta_0)}} \le \frac{1}{|s-\rho_0|} = \frac{1}{\sqrt{(\sigma-\beta_0)^2+(t-\gamma_0)^2}} \le \frac{1}{\sigma-\beta_0},$$

$$s - \rho_0 = (\sigma - \beta_0) + i(t - \gamma_0) = (\sigma - \beta_0)(1 + iO(\frac{1}{\nu^2}))\ ),$$

$$\frac{|\rho - s|}{|\rho_0 - s|} > 2 \quad (\rho \ne \rho_0) \ \ for\ \ \forall\rho = \beta + i\gamma, \quad \frac{|1-s|}{|\rho_0 - s|} > 2$$

(ρ は ρ_0 以外の $\zeta_K(\rho)$ の非自明な零点 non-trivial zero)

となるように選ぶ (これは明らかに可能である。) と

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0} \le \max\left\{Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}},\ Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m},\ Y^{2c}\frac{\exp(\frac{6c\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{1-\sigma}\right\}$$

となる。
従って，この結論は定理の仮定 $(*)$ と矛盾し，ρ_0 は，もはや $\zeta_K(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero ではあり得ない。

主定理１を証明するには次の幾つかの補題を必要とする。

補題 1 (Hölder の不等式の系)
$\nu > 1$, $H > 0$, $[A,\ A + H]$ で可積分な関数 $f(t)$ に対して,

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^{1/\nu} dt \le \left[\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^2 dt\right]^{1/(2\nu)},$$

$$\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)|^{1/(2\nu)} dt \le \left[\frac{1}{H}\int_A^{A+H} |f(t)| dt\right]^{1/(2\nu)}$$

が成立する。

証明

$(1/2\nu)+(1/\mu)=1$ となる μ をえらぶ。Hölder の不等式より

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^{1/\nu}dt\\
\le\ &\frac{1}{H}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^{(1/\nu)\cdot 2\nu}dt\right\}^{1/2\nu}\left\{\int_A^{A+H}1^{\mu}dt\right\}^{1/\mu}\\
=\ &\frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^2dt\right\}^{1/2\nu}H^{1/\mu}\\
=\ &\left\{\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^2dt\right\}^{1/2\nu}
\end{aligned}$$

を得る。後半については同様にして

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|^{1/(2\nu)}dt\\
\le\ &\frac{1}{H}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|^{(1/(2\nu))\cdot 2\nu}dt\right\}^{1/2\nu}\left\{\int_A^{A+H}1^{\mu}dt\right\}^{1/\mu}\\
=\ &\frac{1}{H^{(1/2\nu)+(1/\mu)}}\left\{\int_A^{A+H}|f(t)|dt\right\}^{1/2\nu}H^{1/\mu}\\
=\ &\left\{\frac{1}{H}\int_A^{A+H}|f(t)|dt\right\}^{1/2\nu}
\end{aligned}$$

□

補題 2 $\sigma>1$, $m=0,1,2,\cdots$ とする。
$m=0$ のとき

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\sigma}}<1+\frac{1}{\sigma-1}$$

$m=1,2,\cdots$ のとき

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}} &< m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}\\
&\ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}\quad(\text{as } m\to\infty\ )
\end{aligned}$$

が成立する。即ち

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^{\sigma}}\ll m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}\quad for\ \sigma>1,\ m=0,1,2,\cdots.$$

証明 先ず $m=1,2,\cdots$ のときを考える。
$f(y):=y^{-\sigma}(\log y)^m$ とおくと $f'(y)=y^{-\sigma-1}(\log y)^{m-1}\{m-\sigma\log y\}$ であるから，$f'(y_0)=0$ となるのは，$y_0=\exp(\frac{m}{\sigma})$ のときのみである。従って $f(y)$ の増減を考えると

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma} &= \sum_{n=2}^{[y_0]-1}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\sum_{n=[y_0]+1}^{\infty}\frac{(\log n)^m}{n^\sigma}\\
&< \int_2^{[y_0]}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}+\int_{[y_0]}^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx\\
&< \int_1^{\infty}\frac{(\log x)^m}{x^\sigma}dx+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(\log[y_0])^m}{[y_0]^\sigma}\\
&\leq m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\frac{(m/\sigma)^m}{(\exp(m/\sigma))^\sigma}\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+\left(\frac{m}{e\sigma}\right)^m\\
&\leq m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^{m+1}+m!\frac{1}{e}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^m\\
&= m!\left(\frac{1}{\sigma-1}\right)^m\left\{\frac{1}{\sigma-1}+\frac{1}{e}\left(\frac{\sigma-1}{\sigma}\right)^m\right\}
\end{aligned}$$

但し，$[t]$ は実数 t の整数部分を表わす。又，

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m\leq\frac{m!}{e}$$

を使った。
$m=0$ のときは

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\sigma}<1+\int_1^{\infty}\frac{1}{x^\sigma}dx=1+\frac{1}{\sigma-1}$$

となり，補題は証明された。□

補題 3 (Montgomery-Vaughan の定理，[37] の 2nd ed.)
$a_n\in\mathbf{C}$, $A\in\mathbf{R}$, $H>0$, $Y>1$, $\sigma>\frac{1}{2}$ とする。このとき

$$\begin{aligned}
\int_A^{A+H}|\sum_{n=1}^{\infty}a_n n^{-\sigma-it}|^2dt &= H\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^{-2\sigma}+\mathrm{O}(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2n^{1-2\sigma})\\
\int_A^{A+H}|\sum_{n\leq Y}a_n n^{-\sigma-it}|^2dt &= H\sum_{n\leq Y}|a_n|^2n^{-2\sigma}+\mathrm{O}(Y\sum_{n\leq Y}|a_n|^2n^{-2\sigma})
\end{aligned}$$

が成立する。ここに，最初の式 *the first equation above* に於ける

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma-it}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 n^{1-2\sigma}$$

は収束すると仮定し，O は絶対定数を持つ Bachmann-Landau のラージ・オウ記号 [26] である。

補題 4 $a_i,\ c_i = c_i(\nu) \in \mathrm{C}$ ，$f_i(\nu) \to 0\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 0, 1, \cdots, n)$ とする。又，$|a_0| > |a_i|\ (i = 1, 2, \cdots, n)$ ，$|c_i|^{1/\nu} \to 1\ (i = 0, 1, 2, \cdots, n)\ as\ \nu \to \infty,\ c_0 \neq 0$ とする。このとき

$$\lim_{\nu\to\infty} |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^{\nu} a_i^{\nu}|^{1/\nu} = \max_{0\le i\le n} |a_i| = |a_0|$$

が成立する。

証明 $\max_{i=1,2,\cdots,n} |a_i/a_0| = 1/r\ (r > 1)$ とおく。

$$\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)} \to 1,\ |c_i|^{1/\nu} \to 1\ as\ \nu \to \infty,\ (i = 1, 2, \cdots, n)$$

また，n が有限 finite であるので，$\forall\epsilon > 0$ に対して $\exists\nu_0$ が存在して，

$$\left|\frac{c_i^{1/\nu}}{c_0^{1/\nu}} \cdot \frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)}\right| < 1 + \epsilon \quad (i = 1, 2, \cdots, n)\ for\ \forall\nu > \nu_0$$

となるが，ここで ϵ を十分小さく選び

$$\frac{1+\epsilon}{r} =: \frac{1}{R} < 1$$

とする。

$$\begin{aligned}
& |\sum_{i=0}^{n} c_i(\nu)(1 + f_i(\nu))^{\nu} a_i^{\nu}|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1 + f_0(\nu)| \left|1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{c_0} \left(\frac{1 + f_i(\nu)}{1 + f_0(\nu)}\right)^{\nu} \left(\frac{a_i}{a_0}\right)^{\nu}\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1 + f_0(\nu)| \left|1 + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{O}\left(\left(\frac{1+\epsilon}{r}\right)^{\nu}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1 + f_0(\nu)| \left|1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right|^{1/\nu} \\
= \ & |c_0|^{1/\nu}|a_0||1 + f_0(\nu)| \left|\left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{R^{\nu}}\right)\right\}^{R^{\nu}\cdot\frac{1}{\nu R^{\nu}}}\right| \\
\to \ & |a_0| \quad (as\ \nu \to \infty)
\end{aligned}$$

となって補題は証明された。□

補題 5　[7], [8], [11], [26], [34], [35]

$$(1)\quad \frac{1}{\Gamma(s)} = e^{\gamma_0 s} s \prod_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{s}{n}\right) e^{-\frac{s}{n}}$$

$$(2)\quad \log\Gamma(s+1) = -[\gamma_0 s + \sum_{n=1}^{\infty}\{\log(1-\frac{s}{(-n)}) + \frac{s}{(-n)}\}]$$

$$\begin{aligned}(3)\quad \frac{\Gamma'}{\Gamma}(s+1) &=: \psi(s+1) = \psi(s) + \frac{1}{s} \\ &= -[\gamma_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{1}{s-(-n)} + \frac{1}{(-n)}\}] \\ &= \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} + O(\frac{1}{|s+1|^2}) \\ &= \frac{d}{ds}\log s + \frac{d}{ds}\log\Gamma(s) \\ &= \frac{1}{s} + \log s - \frac{1}{2s} + O(\frac{1}{|s|^2}) \\ &= \log s + \frac{1}{2s} + O(\frac{1}{|s|^2})\end{aligned}$$

但し，γ_0 は Euler の定数である。

補題 6 (i)

$$\begin{aligned}\Theta(s) &:= s(s-1)\Theta_K(s) \\ &= s(s-1)\left(\frac{\sqrt{|d_K|}}{2^{r_2}\pi^{\frac{n}{2}}}\right)^s \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1} \Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s) \\ &= s(s-1)A(1)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s) \\ &= e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}},\end{aligned}$$

$$\zeta_K(s) = \frac{A(1)^{-s}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}} e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

(ii) 上記積に現れる零点 *zeros*:ρ は無限個 *infinitely many* ある。

注 上記 $0<\Re\rho<1$ を満たす零点 *zero* を非自明な零点 *non-trivial zero* と云う。

証明 (i) 整関数 $s(s-1)A(1)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)$ の位数が 1 である (証明省略) こと，$\Theta(0)\neq 0$ から，Weierstrass-Hadamard の因数分解定理 [34], [38] を適用し

$$s(s-1)A(1)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s)=e^{A+Bs}\prod_{0<\Re\rho<1}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)e^{\frac{s}{\rho}}$$

となる。
(ii) 証明省略.
これで補題は証明された。□

補題 7 (i)

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)=\{\log A(1)-B\}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+\frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2})+r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)-$$
$$-\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$=\{\log A(1)-B\}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s-1}+$$
$$+\frac{r_1}{2}\left(-\frac{1}{\frac{s}{2}}-\left[\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{\frac{s}{2}-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right]\right)+$$
$$+r_2\left(-\frac{1}{s}-\left[\gamma_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}\right]\right)-$$
$$-\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$=\{\log A(1)-B\}-\frac{r_1+r_2-1}{s}+\frac{1}{s-1}-\left(\frac{r_1}{2}+r_2\right)\gamma_0-$$
$$-r_1\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-2n)}+\frac{1}{(-2n)}\right\}-r_2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{s-(-n)}+\frac{1}{(-n)}\right\}-$$
$$-\sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\},$$

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)}=-\frac{r_1+r_2-1}{s^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-1)^{\nu+1}}-$$
$$-r_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s-(-2n))^{\nu+1}}-r_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s-(-n))^{\nu+1}}-$$
$$-\sum_{\rho}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N}).$$

(ii)

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) = \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K} \frac{\Lambda(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s} \quad (\Re s > 1)$$

$$where\ \Lambda(\mathfrak{n}) := \begin{cases} \log N(\mathfrak{p}), & (\mathfrak{n} = \mathfrak{p}^m, {}^\exists\mathfrak{p}; prime\ ideal, {}^\exists m \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}$$

証明 (i) 補題6(i) の

$$\zeta_K(s) = \frac{A(1)^{-s}}{s(s-1)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}} e^{A+Bs} \prod_{0<\Re\rho<1} \left(1-\frac{s}{\rho}\right) e^{\frac{s}{\rho}}$$

を対数微分 logarithmic derivative して補題5(3) を代入すれば良い。最後の式は更に ν 回微分すれば良い。

(ii) $\zeta_K(s)$ の Euler 積：

$$\zeta_K(s) = \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K} \frac{1}{N(\mathfrak{n})^s} = \prod_{\mathfrak{p}\in P_K} \frac{1}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}}, \quad \Re s > 1$$

を対数微分 logarithmic derivative すると ($\Re s > 1$)

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) = \sum_{\mathfrak{p}\in P_K} \frac{N(\mathfrak{p})^{-s}\log N(\mathfrak{p})}{1-N(\mathfrak{p})^{-s}} =$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}\in P_K} \log N(\mathfrak{p}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\mathfrak{p})^{ms}}$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}\in P_K, m\in\mathbf{N}} \frac{\log N(\mathfrak{p})}{N(\mathfrak{p}^m)^s}$$

$$= \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K} \frac{\Lambda(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s}.$$

これで補題の証明は完了した。□

補題 8　$N_K(T) := {}^\sharp\{\rho \in \mathbf{C} \mid 0 < \Re\rho < 1, 0 \le \Im\rho \le T, \zeta_K(\rho) = 0\}$ と定義すると

$$N_K(T+1) - N_K(T) \ll \log T.$$

証明 補題 7(i) に補題 5(2) を使って

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) &= \{\log A(1) - B\} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{s}{2}) + r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) - \\
&- \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \{\log A(1) - B\} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s-1} + \mathrm{O}(\log t) - \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\} \\
&= \mathrm{O}(\log t) - \sum_{\rho}\left\{\frac{1}{s-\rho} + \frac{1}{\rho}\right\}
\end{aligned}
$$

となるが，ここで $s = 2 + iT$ を代入して

$$
\begin{aligned}
-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(2+iT) &= \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I_K} \frac{\Lambda(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^{2+iT}} \\
&= \sum_{\mathbf{p}\in P_K} \log N(\mathbf{p}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{N(\mathbf{p})^{m(2+iT)}}
\end{aligned}
$$

($N(\mathbf{p}) = p^f$, $\mathbf{p}|(p)$, $f \in \mathbf{N}$ は $\mathbf{p}$ の (絶対) 次数, $^\exists p$ は有理素数で $q \neq p$ なる有理素数 q に対して，素イデアル $\mathbf{q}$ が $\mathbf{q}|(q)$ ならば $\mathbf{q} \neq \mathbf{p}$)

$$
= \sum_{p:\text{有理素数}} \sum_{\mathbf{p}|(p),\mathbf{p}\in P_K} \log p^f \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p^f)^{m(2+iT)}}
$$

((p) の素イデアル分解を $(p) = \mathbf{p}_1{}^{e_1}\cdots\mathbf{p}_k{}^{e_k}$ とすると，
$p^n = N((p)) = N(\mathbf{p}_1)^{e_1}\cdots N(\mathbf{p}_k)^{e_k} = (p^{f_1})^{e_1}\cdots(p^{f_k})^{e_k}$ より
$e_1 f_1 + \cdots + e_k f_k = n$ となるので $1 \leq e_i, f_i, k \leq n$, $i = 1, 2, \cdots k$.)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{p:\text{有理素数}} \sum_{i=1}^{k} \log p^{f_i} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p^{f_i})^{m(2+iT)}} \\
&\ll \sum_{p:\text{有理素数}} kn \log p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(p)^{2m}} \\
&\ll n^2 \sum_{p:\text{有理素数},\ m\in\mathbf{N}} \frac{\log p}{(p^m)^2} \\
&= n^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Lambda(l)}{l^2} \ll 1,
\end{aligned}
$$

$$
\textit{where } \Lambda(n) := \begin{cases} \log p, & (n = p^m, {}^\exists p; \textit{rational prime}, {}^\exists m \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他のとき}) \end{cases}
$$

は *von Mangoldt* 関数である。

を使うと

$$\mathrm{O}(\log T)+\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(2+iT)=\sum_\rho\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\mathrm{O}(\log T)+\mathrm{O}(1)=\sum_\rho\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}$$
$$\Longrightarrow$$
$$\begin{aligned}\mathrm{O}(\log T)&=\sum_\rho\Re\left\{\frac{1}{2+iT-\rho}+\frac{1}{\rho}\right\}\\&=\sum_\rho\left\{\frac{2-\beta}{(2-\beta)^2+(T-\gamma)^2}+\frac{\beta}{\beta^2+\gamma^2}\right\}\\&>\sum_\rho\frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2}>\sum_{T<\gamma\le T+1}\frac{1}{2^2+(T-\gamma)^2}\end{aligned}$$
$$>\sum_{T<\gamma\le T+1}\frac{1}{2^2+1^2}=\frac{1}{5}\sum_{T<\gamma\le T+1}1=\frac{1}{5}\{N_K(T+1)-N_K(T)\}$$

これで証明は完了した。□

補題 9 ([26] 補題6.9系の一般化)
$\sigma>\frac{1}{2}$, $s\neq\rho,-n,0,1$ $(n=1,2,\cdots)$ として,

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)}$$
$$=-\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log(2+|t|)\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right)$$
$$(\nu=0,1,2,\cdots)$$

証明 補題7(i) より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)}=$$
$$=-\frac{r_1+r_2-1}{s^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-1)^{\nu+1}}-$$
$$-r_1\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(s-(-2n))^{\nu+1}}-r_2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(s-(-n))^{\nu+1}}-$$
$$-\sum_\rho\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N})$$
$$=\mathrm{O}(\frac{1}{\sigma^{\nu+1}})+\mathrm{O}(\frac{1}{(1-\sigma)^{\nu+1}})-$$

$$-r_1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s-(-2n))^{\nu+1}} - r_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s-(-n))^{\nu+1}} -$$
$$-\sum_{\rho} \frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} \quad (\nu \in \mathbf{N}).$$

上記右辺第3,4項は，$\sigma > \frac{1}{2}$ であるから，$|s+n|^{-\nu-1}$ は n について単調減少である。従って

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s+n|^{\nu+1}} \ll \\
\ll\ & \int_0^{\infty} \frac{dy}{|s+y|^{\nu+1}} \\
=\ & \int_0^{\infty} \frac{dy}{(\sigma^2+2y\sigma+y^2+t^2)^{(\nu+1)/2}} \\
=\ & \int_0^{\infty} \frac{dy}{\{(\sigma+y)^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}} \\
=\ & \int_{\sigma}^{\infty} \frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}} \\
=\ & \left[\int_{\sigma}^{|s|} \frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}} + \right. \\
& \left. + \int_{|s|}^{\infty} \frac{dx}{\{x^2-\sigma^2+|s|^2\}^{(\nu+1)/2}}\right] \\
<\ & \left[\int_{\sigma}^{|s|} \frac{dx}{(|s|^2)^{(\nu+1)/2}} + \int_{|s|}^{\infty} \frac{dx}{(x^2)^{(\nu+1)/2}}\right] \\
=\ & \left[\frac{1}{|s|^{\nu+1}}\{|s|-\sigma\} + \frac{1}{\nu}\frac{1}{|s|^{\nu}}\right] \\
\ll\ & \frac{1}{|s|^{\nu}} \\
\ll\ & \frac{1}{\sigma^{\nu}} \quad for\ \sigma > \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

第5項については，これを２つの和に分ける：

$$\sum_{\rho} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} = \sum_{|t-\gamma|\le 1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

この第2項を評価する:

$$\left|\sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}\right| \le \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|s-\rho|^{\nu+1}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[(\sigma-\beta)^2+(t-\gamma)^2]^{(\nu+1)/2}} < \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n<|t-\gamma|\leq n+1} \frac{1}{|t-\gamma|^{\nu+1}} \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \sum_{n<|t-\gamma|\leq n+1} 1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n<\gamma-t\leq n+1} 1 + \sum_{-n-1\leq\gamma-t<-n} 1 \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \left(\sum_{n+t<\gamma\leq n+1+t} 1 + \sum_{-n-1+t\leq\gamma<-n+t} 1 \right) \\
&\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) \\
&< \sum_{n\leq|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n
\end{aligned}
$$

ここで，補題8を使った。次に $|t|\leq 1$ と $|t|>1$ の二つの場合に分ける。

$|t|\leq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) &\ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log n \\
&\ll 1.
\end{aligned}
$$

$|t|>1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|) < \sum_{n\leq|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2|t| + \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log 2n \ll \\
&\ll \log 2|t| + \log 2 \sum_{n>|t|} \frac{1}{n^{\nu+1}} + \sum_{n>|t|} \frac{\log n}{n^{\nu+1}} \\
&\ll \log 2|t| + \log 2 \int_{|t|}^{\infty} \frac{dx}{x^{\nu+1}} + \int_{|t|}^{\infty} \frac{\log x dx}{x^{\nu+1}} \\
&= \log 2|t| + \frac{\log 2}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{\log|t|}{\nu|t|^{\nu}} + \frac{1}{\nu^2|t|^{\nu}} \\
&\ll \log 2(|t|+2) \quad (\text{as } \nu \to \infty).
\end{aligned}
$$

$|t|\leq 1$ と $|t|>1$，いずれの場合も

$$
\left| \sum_{|t-\gamma|>1} \frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} \right| \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\nu+1}} \log(n+|t|)
$$

$$\ll \log 2(|t|+2) \quad (\text{as } \nu \to \infty).$$

以上より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)} =$$

$$= \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right) - -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}}$$

$$= -\sum_{|t-\gamma\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} - \sum_{|t-\gamma|>1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right)$$

$$= -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{[s-\rho]^{\nu+1}} + \mathrm{O}(\log 2(|t|+2)) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\sigma^\nu}\right) + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right)$$

となり，補題は証明された。□

補題 10　$s=\sigma+it$, $\frac{1}{2}<\sigma<1$ を $\zeta_K(s)$ の正則点として，s に一番近い $\zeta_K(s)$ の非自明な零点は1つとして，それを $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$, $\beta_0<\sigma$ とする $(|s-\rho|>|s-\rho_0|)$。そして $|s-\rho_0|<|s-(-n)|$ $(n=-1,0,1,2,\cdots)$, $|s-\rho_0|<\sigma\le|s|$, $|s-\rho_0|\ll 1$ とする。このとき

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)} = -\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}$$

証明 補題9, $|s-\rho_0|<\sigma$, $|s-\rho_0|<|s-(-n)|$ $(n=-1,0,1,2,\cdots)$ より

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)} =$$

$$= -\sum_{|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right) +$$

$$+\mathrm{O}\left\{\frac{1}{\sigma^\nu}\right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right)$$

$$= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left\{\frac{1}{\sigma^\nu}\right\} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{(1-\sigma)^\nu}\right) -$$

$$- \sum_{\rho;\rho\ne\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{1}{(s-\rho)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)$$

$$= -\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}} +$$

$$+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left\{\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{\sigma^\nu}\right\} + \frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left\{\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(1-\sigma)^\nu}\right\} -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\le 1}\frac{(s-\rho_0)^{\nu+1}}{(s-\rho)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)\\
&=-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}o(1)-\\
&-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\sum_{\rho;\rho\neq\rho_0,|t-\gamma|\le 1}o(1)+\mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\\
&-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}o(\log(2+|t|))+\mathrm{O}\left(\log 2(|t|+2)\right)\\
&\quad(\text{補題}8\text{を使った。})\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}o(\log(2+|t|))+\\
&+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\mathrm{O}\left((s-\rho_0)^{\nu+1}\log 2(|t|+2)\right)\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}-\\
&-\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}o(\log(2+|t|))+\frac{1}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}o\left(\log 2(|t|+2)\right)\\
&=-\frac{1+o(\log 2(|t|+2))}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}\quad as\ \nu\to\infty\quad\square
\end{aligned}
$$

補題 11　[8], [11], [26], [34]
$c>0,\ Y>0$ に対して

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{Y^w}{w^2}dw=\begin{cases}\log Y, & (1\le Y)\\ 0, & (0<Y\le 1)\end{cases}
$$

補題 12（[29] の改変）
$c>0,\ X,Y>1$ に対して

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{X^w(Y^w-1)}{n^{\frac{w}{\nu}}w^2\log Y}dw=\begin{cases}1 & ,\quad (n\le X^\nu)\\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right)\le 1, & (X^\nu\le n\le (XY)^\nu)\\ 0 & ,\quad ((XY)^\nu\le n)\end{cases}
$$

証明　補題11を使えば良い。□

補題 13
実数上有界な台 $[B, C]$ を持つ複素数値関数 $f(v) = f_1(v)+if_2(v)$, $(f_1(v) := \Re f(v)$, $f_2(v) := \Im f(v))$ の Fourier 変換：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivx)dv \quad \cdots(a)$$

は x の実解析的関数 real analytic function である。更に x を $z = x + iy$ に拡張した

$$F(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv \quad \cdots(b)$$

は $z = x + iy$ の複素解析的関数 complex analytic function である。
注　この補題は、ある意味，弱い意味で Paley-Wiener の定理の逆となっている。

証明　複素解析的ならば実解析的であるから，後者を証明すれば良い。

$$F(z) = F(x+iy) = F_1(z) + iF_2(z) = F_1(x+iy) + iF_2(x+iy)$$

と置いて実数値関数 $F_1(z)$, $F_2(z)$ が Cauchy-Riemann の方程式を満たしていることを以下に示す。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)\exp(ivz)dv = \int_B^C f(v)\exp(ivz)dv,$$

$$f(v)\exp(ivz) = \{f_1(v) + if_2(v)\}\exp[iv(x+iy)] =$$

$$= \{f_1(v) + if_2(v)\}e^{-vy}\{\cos(vx) + i\sin(vx)\}$$

$$= \{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy} + i\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}$$

であり，この場合積分と偏微分の交換が可能であることから

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\cos(vx) - f_2(v)\sin(vx)\}e^{-vy}dv,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = -\int_B^C v\{f_1(v)\sin(vx) + f_2(v)\cos(vx)\}e^{-vy}dv$$

となり (勿論これらの積分が存在する場合を考えている). これより

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_2}{\partial y},$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_2}{\partial x}$$

が従う。これは Cauchy-Riemann の方程式である。□

補題 14　[27]
$m \in \mathbf{N}$ として, $N(\mathbf{n}) = m$ となる整イデアル $\mathbf{n}$ の個数を $F(m)$ で表わすと

$$F(m) := \sharp\{\mathbf{n} \ : \ \mathbf{n} \in I_K,\ N(\mathbf{n}) = m\ \} \le d_n(m) \ll_\epsilon m^\epsilon$$
$$for\ any\ small\ \epsilon > 0.$$

ここで

$$d_n(m) := \sum_{m_1 \cdots m_n = m} 1.$$

注

$$\left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^s}\right)^n =: \sum_{l=1}^{\infty} \frac{d_n(l)}{l^s},\ \Re s > 1.$$

$d_n(m)$ は一般約数関数である。

補題 15

(i)
$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)} = \frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{ds^\nu}\sum_{(1)|\mathbf{n}\in I_K}\frac{\Lambda(\mathbf{n})}{N(\mathbf{n})^s} =$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(\log m)^\nu}{m^s}G(m),\ \Re s > 1,\ \nu = 0, 1, 2, \cdots$$
$$where\ G(m) := \sum_{(1)|\mathbf{n}\in I_K,\ N(\mathbf{n})=m} \Lambda(\mathbf{n}),$$

(ii)
$$G(m) = \begin{cases} \ll n \log m, & (m = p^e,\ p \text{ は有理素数},\ e \in \mathbf{N}) \\ 0, & (\text{その他}) \end{cases}$$

証明 (i)

$$-\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) = \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K} \frac{\Lambda(\mathfrak{n})}{N(\mathfrak{n})^s} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K,\ N(\mathfrak{n})=m} \frac{\Lambda(\mathfrak{n})}{m^s}$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K,\ N(\mathfrak{n})=m} \Lambda(\mathfrak{n})$$
$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} G(m)$$

この両辺を ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ 回微分すれば良い。

(ii)

$$G(m) = \sum_{(1)|\mathfrak{n}\in I_K,\ N(\mathfrak{n})=m} \Lambda(\mathfrak{n})$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}\text{は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ N(\mathfrak{p}^l)=m} \log N(\mathfrak{p})$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}\text{は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ N(\mathfrak{p})^l=m} \log N(\mathfrak{p})$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}\text{は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ (p^f)^l=m} \log N(\mathfrak{p}),\ (f\text{ は }\mathfrak{p}\text{ の (絶対) 次数})$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}\text{は素イデアル},\ l\in\mathbf{N}\ :\ p^{fl}=m} \log p^f,$$

従って $G(m) = 0\ for\ m \neq p^e$, p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$.
よって $m = p^e$, p は有理素数, $e \in \mathbf{N}$ のとき,

$$G(p^e) = \sum_{\mathfrak{p}|(p),\ l\in\mathbf{N}\ :\ p^{fl}=p^e} \log p^f$$

$(p) = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{e_k}$; $\mathfrak{p}_i$ の (絶対) 次数を f_i, $i = 1, 2, \cdots, k$ とすると

$$G(p^e) = \sum_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i\ i=1,\cdots,k\ :\ p^{f_i l_i}=p^e} \log p^{f_i}$$
$$= \sum_{\mathfrak{p}=\mathfrak{p}_i\ i=1,\cdots,k\ :\ f_i l_i=e} \log p^{f_i}$$
$$= \sum_{i=1}^{k} \sum_{f_i|e} \log p^{f_i} \quad (f_i|e\text{ ではないときは}\sum_{f_i|e} = \phi)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{k} \log p^e$$
$$\leq k \log m \ll n \log m \qquad \square.$$

補題 16

$$\zeta_K(\frac{1}{2}) \neq 0.$$

証明
関数等式

$$A(1)^s\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(s)^{r_2}\zeta_K(s) = A(1)^{1-s}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{r_1}\Gamma(1-s)^{r_2}\zeta_K(1-s)$$

の両辺を対数微分すると

$$\log A(1) + \frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) + r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s) + \frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) =$$
$$-\log A(1) - \frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s}{2}\right) - r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - \frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(1-s)$$

$\Longleftrightarrow$

$$\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s) + \frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(1-s) =$$
$$= -2\log A(1) - \frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1-s}{2}\right) - \frac{r_1}{2}\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{s}{2}\right) -$$
$$-r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(1-s) - r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(s)$$

これに $s = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$2\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\frac{1}{2}) = -2\log A(1) - r_1\frac{\Gamma'}{\Gamma}\left(\frac{1}{4}\right) - 2r_2\frac{\Gamma'}{\Gamma}(\frac{1}{2}) \neq \infty$$

となるので $\zeta_K(\frac{1}{2}) \neq 0.$ □

補題 17

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(1-s)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}$$
$$\ll \frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y} \;\; \mathit{with} \; {}^{\exists}c > 0.$$

証明

補題 7,(ii) の

$$\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}=-\frac{r_1+r_2-1}{(s+\frac{w}{\nu})^{\nu+1}}+\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-1)^{\nu+1}}-$$
$$-r_1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-(-2n))^{\nu+1}}-r_2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-(-n))^{\nu+1}}-$$
$$-\sum_{\rho}\frac{1}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho)^{\nu+1}}\quad(\nu\in\mathbf{N}).$$

より

$$\operatorname*{Res}_{w=\nu(1-s)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}=$$
$$=\nu^{\nu+1}\frac{1}{\nu!}\frac{d^\nu}{dw^\nu}\left[\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right]_{w=\nu(1-s)}$$
$$=\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\frac{d^{\nu-k}}{ds^{\nu-k}}\{X^w(Y^w-1)\}\Big|_{w=\nu(1-s)}$$
$$=\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k}{k!(\nu-k)!}(k+1)!w^{-2-k}\times$$
$$\times\left\{(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w-(\log X)^{\nu-k}X^w\right\}\Big|_{w=\nu(1-s)}$$
$$\ll\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{k!(\nu-k)!}(k+1)!|w|^{-2-k}\,(\log XY)^{\nu-k}(XY)^w\Big|_{w=\nu(1-s)}$$
$$\ll\frac{\nu^{\nu+1}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{k+1}{(\nu-k)!}|\nu(1-s)|^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(1-\sigma)}$$
$$\ll\frac{1}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}|(1-s)|^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}(XY)^{\nu(1-\sigma)}$$
$$\ll\frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}|(1-s)|^{-2-k}(\log XY)^{\nu-k}$$
$$\ll\frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{|(1-s)|^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}|(1-s)|^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}$$
$$\ll\frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\sum_{k=0}^{\nu}\frac{1}{(\nu-k)!}\nu^{\nu-k}|1-s|^{\nu-k}(\log XY)^{\nu-k}$$
$$\ll\frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\sum_{l=0}^{\nu}\frac{1}{l!}\nu^l|1-s|^l(\log XY)^l$$

$$\ll \frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\times$$
$$\times\left[\exp\{\nu|1-s|\log(XY)\}-\sum_{l=\nu+1}^{\infty}\frac{1}{l!}(\nu|1-s|\log XY)^{l}\right]$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu(1-\sigma)}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\exp\{\nu|1-s|\log(XY)\}$$
$$\ll \frac{(XY)^{\nu(1-\sigma+|1-s|)}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\ll\frac{(XY)^{2\nu|1-s|}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}$$
$$\ll \frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}$$

(実軸近くの零点を考えているので $|1-s|<c\ with\ {}^{\exists}c>0.$)

□

主定理1の証明

以降，$o(\cdot)$，$O(\cdot)$，$\ll$，$\sim$ 等の記号は $\nu\to+\infty$ のときを考えている。
$s=\sigma+it$，$\frac{1}{2}<\sigma<1$，$\nu\in\mathrm{N}$，$1\ll\nu$，$X,Y>1$，$\delta>1$ として次の積分を考える：

$$I_{\nu}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^{w}(Y^{w}-1)dw}{w^{2}\log Y}$$
$$(\frac{1}{2}<\sigma<1,\ w=u+iv).$$

ここで，後に $X=\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\ll\frac{1}{\sigma-\beta_0}$，$\delta>1$　[35] とする。δ は後に決める。
補題12,15を使うと，この積分 I_ν は

$$I_{\nu}=\frac{1}{\nu!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)(\log n)^{\nu}}{n^{s}}\frac{1}{2\pi i}\int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty}\frac{X^{w}(Y^{w}-1)}{n^{w/\nu}}\frac{dw}{w^{2}\log Y}$$
$$=\frac{1}{\nu!}\sum_{n\le(XY)^{\nu}}\frac{G(n)(\log n)^{\nu}}{n^{s}}\alpha_{n},$$
$$where\ \alpha_{n}:=\begin{cases}1 & ,\quad (n\le X^{\nu})\\ \frac{1}{\log Y}\log\left(\frac{XY}{n^{\frac{1}{\nu}}}\right)\le 1, & (X^{\nu}\le n\le(XY)^{\nu})\\ 0 & ,\quad ((XY)^{\nu}\le n)\end{cases}$$
$$\cdots(1)$$

となる。ここで，

$$(-1)^{\nu+1}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{G(n)(\log n)^{\nu}}{n^s}\quad(\sigma>1)$$

である。

ここで積分路を次の $L=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5$ に移す。積分路 L は次の通りである：$A>1$ として

$$\begin{aligned}
L&=L_1+L_2+L_3+L_4+L_5\\
L_1&=[\nu-i\infty,\ \nu+i\nu(V_m^--t)],\\
L_2&=[\nu+i\nu(V_m^--t),\ -A+i\nu(V_m^--t)],\\
L_3&=[-A+i\nu(V_m^--t),\ -A+i\nu(V_m^+-t)],\\
L_4&=[-A+i\nu(V_m^+-t),\ \nu+i\nu(V_m^+-t)],\\
L_5&=[-\nu+i\nu(V_m^+-t),\ \nu+i\infty].
\end{aligned}$$

留数定理により，

$$\begin{aligned}
I_\nu&=\operatorname*{Res}_{w=0}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\operatorname*{Res}_{w=\nu(1-s)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s)^{(\nu)}+\\
&+\operatorname*{Res}_{w=\nu(1-s)}\left\{\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=-\frac{1+o(1)}{(s-\rho_0)^{\nu+1}}+\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1+L_2+L_3+L_4+L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\qquad\cdots(2)
\end{aligned}$$

を得る。ここで，補題 10,17 を使った。また，$\nu\gg1$ であるので $\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})$ の特異点 $w=\nu(\rho-s)$，$\nu(0-s)$ は $\Re\nu(\rho-s)<-A$，$\Re\nu(0-s)<-A$ とな

り，積分路 L の定義により積分路 L の右側に特異点 $w=\nu(\rho-s)$, $\nu(0-s)$ は存在しない。

次に (2) の5つの積分を上から評価する。
積分路 L_1 上では, 補題15より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\nu(V_m^--t)}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma+1)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|w|^2}dw\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{n(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll n\frac{(XY)^\nu}{\nu!}\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\log m)^{\nu+1}}{m^{\sigma+1}}\int_0^\infty\frac{dw}{|w|^2}\\
&\ll \frac{(XY)^\nu}{\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dv}{\nu^2+v^2}\\
&= \frac{(XY)^\nu}{\nu\nu!}(\nu+1)!\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\int_0^\infty\frac{dy}{1+y^2}\\
&= (XY)^\nu\frac{\nu+1}{\nu}\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\left(\frac{\pi}{2}\right)\\
&\ll (XY)^\nu\left(\frac{1}{\sigma}\right)^{\nu+2}\\
&\ll \frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu \ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu \qquad \cdots(3)
\end{aligned}
$$

となる。ここで補題2を使った。
積分路 L_5 上でも同様に

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_5}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&\ll \left(\frac{XY}{\sigma}\right)^\nu = \left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu \qquad \cdots(3')
\end{aligned}
$$

積分路 L_2 上では

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw
$$

$$\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu+i\nu(V_m^- -t)}^{-A+i\nu(V_m^- -t)} \frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma+it+\frac{u}{\nu}+\frac{i}{\nu}\nu(V_m^- -t))^{(\nu)}\right| \times$$
$$\times \frac{(XY)^\nu}{|i\nu(V_m^- -t)|^2}dw$$
$$\ll \frac{1}{\log Y}\int_{\nu}^{-A}\frac{1}{\nu!}\left|\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(\sigma+\frac{u}{\nu}+iV_m^-)^{(\nu)}\right|\frac{(XY)^\nu}{|\nu(V_m^- -t)|^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}\int_\nu^{-A}\frac{1}{(U_m)^{\nu+1}\nu^2}du$$
$$\ll \frac{(XY)^\nu}{\log Y}(A+\nu)\frac{1}{\nu^2(U_m)^{\nu+1}} \ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \quad \cdots(4)$$

ここでは U_m の定義を使った。積分路 L_4 上でも同様に

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_4}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$\ll \left(\frac{XY}{U_m}\right)^\nu = \left(\frac{Y\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu \quad \cdots(4')$$

次に残りの積分路 L_3 上の積分について考える。$B \gg 1$ として積分路 L_3 を3つ：

$$L_{3,1} := [-A+i\nu(V_m^- -t), -A-iB],$$
$$L_{3,2} := [-A-iB, -A+iB],$$
$$L_{3,3} := [-A+iB, -A+i\nu(V_m^+ -t)],$$
$$0 < \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \text{ と } B \text{ を選ぶ.}$$

に分けて評価する。A の値は後に決めるが，その A の値に対して B を定める。
さて

$$\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}$$

を考える。
仮定している $s-\rho_0 = (\sigma-\beta_0)(1+i\mathrm{O}(\frac{1}{\nu^2}))$ を使い $\nu \gg 1$ を考えると

$$\left\{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)\right\}^{\nu+1}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{(\sigma-\beta_0)+\mathrm{O}(\frac{1}{\nu^2})+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1} \\
&\sim \left\{(\sigma-\beta_0)+\frac{-A+iv}{\nu}\right\}^{\nu+1} \\
&= (\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^{\nu+1},
\end{aligned}
$$

$$
\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}
$$

は $|v| \le B$ のとき，

$$
\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)} \\
&= \frac{1+\mathrm{o}(1)}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)} \\
&= (1+\mathrm{o}(1))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

であり $|v| \ge B$ のときは，

$$
\begin{aligned}
&\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)} \\
&= \left|1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)}\left|1+i\frac{v/\{\nu(\sigma-\beta_0)\}}{1+\frac{-A}{\nu(\sigma-\beta_0)}}\right|^{-(\nu+1)} \\
&\sim \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\left|1+i\frac{v}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{-(\nu+1)} \\
&\le \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

である。これらの準備を基に $L_{3,3}, L_{3,2}, L_{3,1}$ 上の積分を評価して行く。先ず $L_{3,3}$ から始める。

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,3}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-A+iB}^{-A+i\nu(V_m^+-t)}\left|\frac{1+o(1)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{1+o(1)}{\left|s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left|1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right|^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{(1+o(1))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}dv}{(A^2+v^2)\log Y}\\
&\leq \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\nu(V_m^+-t)}\frac{dv}{(A^2+v^2)}\\
&< \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\int_{B}^{\infty}\frac{dv}{(A^2+v^2)}\\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\int_{\frac{B}{A}}^{\infty}\frac{dy}{(1+y^2)}\\
&= \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\left\{\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{B}{A}\right)\right\}\\
&\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)\\
&= \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y}\\
&\cdots(5)
\end{aligned}
$$

ここで $w\in L_{3,3}$ であるから，$w=-A+iv=-A+i\nu(y-t)$，
$B\leq v\leq \nu(V_m^+-t)$ より

$$
\begin{aligned}
s+\frac{w}{\nu} &= \sigma+it+\frac{-A+i\nu(y-t)}{\nu}\\
&= (\sigma-\frac{A}{\nu})+iy \quad (\frac{B}{\nu}+t\leq y\leq V_m^+).
\end{aligned}
$$

従って，$\rho\neq\rho_0$ なる ρ に対して $w\in L_{3,3}$ であるとき

$$\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho\right|>\left|s+\frac{w}{\nu}-\rho_0\right|$$

となるので補題 12 を使ったことに注意すべきである。
$L_{3,1}$ 上での積分も同様に

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,1}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{2\pi}\int_{-A+i\nu(V_m^- -t)}^{-A-iB}\left|\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\right|\frac{X^{-A}dw}{|w|^2\log Y}\\
&\ll \frac{1}{2\pi\log Y}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\frac{X^{-A}}{A}\exp\left(\frac{-A}{\sigma-\beta_0}\right)\\
&= \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A}}{2\pi A\log Y}\\
&\quad\cdots(5')
\end{aligned}
$$

となる。

最後に $L_{3,2}$ 上の積分を考える：

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw
$$

について詳述する:

$|v|\le B$ のとき,

$$
\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\
&=\frac{1+\mathrm{o}(1)}{\exp\left(\frac{-A+iv}{\sigma-\beta_0}\right)}\\
&=(1+\mathrm{o}(1))\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

であるが，これを詳しく述べると $\frac{A+B}{\nu(\sigma-\beta_0)}\ll 1$ であるので

$$
\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-(\nu+1)}\\
&=\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1}\exp\left[(-\nu)\log\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)\right]\\
&=\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1}\times\\
&\times\exp\left[(-\nu)\left\{\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}-\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^2+\cdots\right\}\right]\\
&=\left\{1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1}\times\\
&\times\exp\left[\frac{A-iv}{(\sigma-\beta_0)}+\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2-\frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3+\cdots\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \exp\left[\frac{1}{2\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu^2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3 + \cdots\right] \\
&= \left\{1 + \frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right\}^{-1} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \exp\left[\frac{1}{\nu}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^2 - \frac{1}{3\nu}\left(\frac{-A+iv}{(\sigma-\beta_0)}\right)^3 + \cdots\right\}\right] \\
&= \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \times \\
&\times \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \\
&= \left\{1 + \mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\} \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \\
&= (1 + \mathrm{o}(1)) \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)
\end{aligned}
$$

である。このことを使って

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y} \\
&= \frac{-1}{2\pi i}\int_{-A-iB}^{-A+iB} \frac{1+o(1)}{(s+\frac{w}{\nu}-\rho_0)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(Y^{-A+iv}-1)dw}{w^2\log Y} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+o(1)}{\left(s-\rho_0+\frac{-A+iv}{\nu}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\int_{-B}^{B} \frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}\left(1+\frac{-A+iv}{\nu(\sigma-\beta_0)}\right)^{\nu+1}}\frac{X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} \times \\
&\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A+iv}(1-Y^{-A+iv})dv}{(-A+iv)^2\log Y} \\
&= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A} \times
\end{aligned}
$$

$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$
$$\cdots(\star)$$

$(\star)$ の右辺の積分を

$$F_\nu(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

と置いて

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

とする。

$$\left|\frac{\left\{1+O\left(\frac{1}{\nu}\right)\right\}\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)\right|$$
$$\leq \frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

をみたし，

$$\frac{2}{(A^2+v^2)\log Y}$$

は可積分 integrable であるので

Lebesgue の優収束定理 Dominated Convergence Theorem を使って

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$

である。また補題15より

$F(X)$ の右辺の積分は $\log X$ の従って $\Re X>0$ で X の複素解析関数となっ

ている。また $F(X)$ の右辺の X^{-A} も $X=0$ の近傍を除いて X の複素解析関数であるから

$$F(X) := \exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) X^{-A} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2 \log Y} \exp(iv\log X)dv$$

は $X=0$ を除いて $\Re X > 0$ で X の複素解析関数となっている。
従って $\nu \gg 1$ に対して

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{3,2}} \frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}F_\nu(X) \quad with \quad \lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$

で $F(X)$ は $X>0$ で実解析的でνに依存しない
複素数値実解析関数である。
$\cdots(6)$

$(1),(2),(3),(3'),(4),(4'),(5),(5'),(6)$ を使うと

$$I_\nu \equiv$$
$$= \frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m$$
$$= -\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}} + \mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\} +$$
$$+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,2}} + \int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw,$$

$\Longleftrightarrow$

$$-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right) +$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{L_{3,1}} + \int_{L_{3,3}}\right\}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw -$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left(\frac{1}{2}\right)+\\
&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\int_{L_{3,2}}}\frac{(-1)^{\nu+1}}{\nu!}\frac{\zeta_K'}{\zeta_K}(s+\frac{w}{\nu})^{(\nu)}\frac{X^w(Y^w-1)}{w^2\log Y}dw\\
&=\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m+\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}+\\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}-\\
&-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}\\
&=\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m+\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}+\\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\}+\mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}
\end{aligned}
$$

$\Longleftrightarrow$ ♣

を得る。ここで上記左辺の第１項：

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}$$

が

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}>\frac{1}{4}$$

であるように $A>1$, $Y>1$ を選び (実際の A, B の選び方は第１番目に上記のように A を選び，第２番目に B を選ぶ)，そして

$$\left\{\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right\}$$

に関して

$$\alpha:=\left\{\left(\frac{1}{2}\right)+\mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A\log Y}\right)\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)>\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

と置き (α が X に依存しないように A を定めることが出来ることに注意すべきである。)

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X) \neq 0$$

となるよう

$$X = \exp\left(\frac{3\delta}{\sigma - \frac{1}{2}}\right) \ll \frac{1}{\sigma - \beta_0},\ \delta > 1$$

の δ を選ぶ。これは $F(X)$ が実解析関数であることと，定数 constant でないこと (注) から可能である。また上記

$$\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)$$

は ν に依存しないことに注意すべきである。
従って上記♣は
♣ $\Longleftrightarrow$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\} \\
&= \frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m + \mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\} + \\
&+\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} \\
&\mathit{with}\ \ \alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X) \neq 0 \\
&\quad\cdots(7)
\end{aligned}$$

となる。

$$\lim_{\nu\to\infty} F_\nu(X) = F(X)$$
$$\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X) \neq 0$$

より，即ち

$$\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right| \to \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| > 0\ \ as\ \nu \to \infty$$

より，十分小さい正数 $0 < \epsilon_0 \ll 1$ を

$$0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0$$

を満たすように選ぶと十分大きい $^\forall\nu \gg 1$ に対して

$$0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0 < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right| < \left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| + \epsilon_0 \qquad \cdots(\star\star)$$

となる。

上記(7)の左辺の絶対値の $\frac{1}{\nu}$ 乗平均値積分を考えるが，$(\star\star)$ と補題1から

$$\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F(X)\right| - \epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\le \frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left\{\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left|\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right|\right\}^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\le \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\alpha - \frac{1}{2\pi i}F_\nu(X)\right\}\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\le \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\} + \mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m + \mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2 dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\le \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left(\left|\mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}\right| + \left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\}\right| + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m\right| + \left|\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|\right)^2 dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\le \left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\mathrm{O}\left(\left|\mathrm{O}\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^\nu\right\}\right|^2 + \right.\right.$$

$$+ \left|\mathrm{O}\left\{\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^\nu\right\}\right|^2 +$$

$$+ \left|\mathrm{O}\left\{\frac{1}{\nu!}\sum_{m\le(XY)^\nu}\frac{G(m)(\log m)^\nu}{m^s}\alpha_m\right\}\right|^2$$

$$+\left|O\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2\Bigg)\,dt\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\leq\left[\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}O\left(\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^2+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left|O\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2+\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^s}\alpha_m\right|^2\right)dt\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\leq\left[O\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^s}\alpha_m\right|^2dt+\right.\right.$$

$$+\left|O\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2+$$

$$\left.\left.+\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^2+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\leq\left[O\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^s}\alpha_m\right|^2dt+\right.\right.$$

$$+\left|O\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2+$$

$$\left.\left.+\left|\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{\nu}\right|^2+\left|\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{\nu}\right|^2\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\cdots(8)$$

を得る。ここで $a,b,c,d\geq 0$ に対して $(a+b+c+d)^2\leq 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$ であることを使った。
(8) の右辺の積分に対して補題 3 を使うと

$$\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\left[O\left\{\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1}{\nu!}\sum_{m\leq(XY)^{\nu}}\frac{G(m)(\log m)^{\nu}}{m^s}\alpha_m\right|^2dt+\right.\right.$$

$$+\left|\mathrm{O}\left\{\frac{(XY)^{2c\nu}}{|1-\sigma|^{\nu+2}\log Y}\right\}\right|^2+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+$$

$$+\mathrm{O}\left(\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2\right)+$$

$$+\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right)^{2\nu}+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+$$

$$+\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right)^{2\nu}+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}\quad\cdots(9)$$

ここで，$\nu\to\infty$ のとき

$$\frac{1}{\sigma-\beta_0}=$$

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{2h}\int_{\gamma_0-h}^{\gamma_0+h}\left|\frac{1+o(1)}{(\sigma-\beta_0)^{\nu+1}}\left\{\left|\alpha-\frac{1}{2\pi i}F(X)\right|-\epsilon_0\right\}\right|^{\frac{1}{\nu}}dt$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+$$

$$+\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right)^{2\nu}+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\cdots(10)$$

(10) の右辺の第 1 項を補題 2 を使って評価する：

$$\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{n^2(\log m)^{2\nu+2}}{m^{2\sigma}}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2(2\nu+2)!\left(\frac{1}{2\sigma-1}\right)^{2\nu+3}$$

$$\ll\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}\frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\times$$

$$\times(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}$$

$$<\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^\nu\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}$$

$$\cdots(11)$$

(10) に (11) を代入して，補題 4 を使うと：

$$\frac{1}{|\sigma-\beta_0|}\leq$$

$$\leq\lim_{\nu\to\infty}\Bigg[\mathrm{O}\Bigg\{\frac{(XY)^\nu}{h}\left(\frac{1}{\nu!}\right)^2\sum_{m\leq(XY)^\nu}\frac{G(m)^2}{m^{2\sigma}}(\log m)^{2\nu}{\alpha_m}^2+$$

$$+\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right)^{2\nu}+$$

$$+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}\Bigg\}\Bigg]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$\leq \lim_{\nu\to\infty}\left[\mathrm{O}\left\{\exp\left(\frac{3\nu\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)Y^{\nu}\frac{\nu^2}{\sigma-\beta_0}(2\nu+2)(2\nu+1)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)^{2\nu+3}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right)^{2\nu}+\left(\frac{Y}{\sigma}\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})\right)^{2\nu}+\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right)^{2\nu}\right\}\right]^{\frac{1}{2\nu}}$$

$$=\max\left\{Y\exp\left(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(\frac{(XY)^{2c}}{1-\sigma}\right),\right.$$

$$\left.\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma}\right)\right\}$$

$$=\max\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right),\left(Y^{2c}\frac{\exp(\frac{6c\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{1-\sigma}\right)\right\}$$

$$\cdots(12)$$

(12) で $\sigma-\beta_0>0$ を保ちながら，σ を β_0 に十分近づければ，$\beta_0>\frac{1}{2}$ であるので，(12) の左辺は ∞ に近づき，一方 (12) の右辺は

$$\max\left\{\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{\sigma-\frac{1}{2}}\right),\left(Y\frac{\exp(\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{U_m}\right),\left(Y^{2c}\frac{\exp(\frac{6c\delta}{\sigma-\frac{1}{2}})}{1-\sigma}\right)\right\}\Bigg|_{\sigma=\beta_0}$$

という有限値 finite value に近づき矛盾が生ずる。従って $\rho_0=\beta_0+i\gamma_0$，$\beta_0>\frac{1}{2}$ なる定理の条件を満たす $\zeta_K(s)$ の非自明な零点 non-trivial zero は存在しない。□

注：$F(X)$ が定数でないことの証明

$$G(z):=F(X):=\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)X^{-A}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2\log Y}\exp(iv\log X)dv$$

$$=\frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y}\times$$

$$\times\int_{-B}^{B}\frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)^2}\exp((-A+iv)z)dv$$

$$with\ \ z:=\log X$$

$G(z) = constant$ と仮定して矛盾を導く：この仮定から

$$\frac{d}{dz}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \frac{\exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv})}{(-A+iv)} \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0,$$

$$\frac{d^2}{dz^2}G(z) = \frac{\exp\left(\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right)}{\log Y} \times$$
$$\times \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp((-A+iv)z)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)(1-Y^{-A+iv}) \exp(ivz)dv$$
$$= 0$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) \exp(ivz)dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{-A+iv} \exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A} \int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv} \exp(ivz)dv$$

$\Longrightarrow$

$$\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right)\exp(ivz)dv$$
$$= Y^{-A}\int_{-B}^{B} \exp\left(-i\frac{v}{\sigma-\beta_0}\right) Y^{iv}\exp(ivz)dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^{A}\int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}dv$$
$$= \int_{-B}^{B} \exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}dv$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^{A}\left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$
$$= \left[\frac{\exp\left\{iv\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{i\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)}\right]_{v=-B}^{B}$$

$\Longleftrightarrow$

$$Y^{A}\frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}$$
$$= \frac{\sin\left\{B\left(\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log XY - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right) + B\log Y\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + \log Y}$$

ここで, $\log Y = 2\pi$, $B \in \mathrm{N}$ とすると

$\Longleftrightarrow$

$$Y^{A}\frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}} = \frac{\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi}$$

$\sin\left\{B\left(\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}\right)\right\} \neq 0$ であるので

$\Longleftrightarrow$

$$Y^A = \frac{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0}}{\log X - \frac{1}{\sigma-\beta_0} + 2\pi} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi}$$

となる。又 $0 < \sigma - \beta_0 \ll 1$ であるので $\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X \gg 1$ であるが，$A \gg 1$ であるので

$\Longleftrightarrow$

$$1 \ll e^{2\pi A} = \frac{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X}{\frac{1}{\sigma-\beta_0} - \log X - 2\pi} \sim 1$$

となり矛盾を引き起こす。従って $Y = e^{2\pi}, 1 \ll B \in \mathbf{N}$ と選べば $F(X) = G(z) \neq constant.$ □

パラメータ $X, Y, A, B, \sigma - \beta_0$ の選び方

$X = \exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}, Y = e^{2\pi}, A, B \in \mathbf{N}, \sigma - \beta_0$ は次の条件 (a),(b),(c)

$$0 < \sigma - \beta_0 \ll \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{XY} = \frac{\sigma - \frac{1}{2}}{e^{2\pi}\exp\{\frac{3\delta}{\sigma-\frac{1}{2}}\}} \cdots \text{(a)}$$

$$\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{B}{A}\right) \ll \exp\left(-\frac{A}{\sigma-\beta_0}\right) \cdots \text{(b)}$$

$$\frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{\pi A \log Y}\right) = \frac{1}{2} + \mathrm{O}\left(\frac{X^{-A}}{A}\right) > \frac{1}{4} \cdots \text{(c)}$$

満たすが，先ず (a) を満たすように $\sigma - \beta_0$ を選び，次に (c) を満たすように A を選んでから，(b) を満たすように B を選ぶ。

注意 1： 主定理 1 を繰り返し適用すると，

$C_{m-1} < \gamma_0 < C_m$ 内にある零点 ρ_0 の実部 β_0 は次第に小さくなり，

非零領域 zero free region：

$$\{\sigma + it \mid \beta_0 < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

は，左方向に広がって行き，遂には

$$\{\sigma + it \mid \frac{1}{2} < \sigma,\ C_{m-1} < t < C_m\}$$

となる。
主定理は次の結論を導いている。即ち，存在を仮定した ρ_0 は実際には存在せず，$\frac{1}{2} < \sigma$ となる $\zeta_K(s)$ の零点 $s = \sigma + it$ は存在しないことになる。この手続きを各 ρ_0 に施せば，結局 $\zeta_K(s)$ の非自明な零点は半平面 $\frac{1}{2} < \sigma$ には存在しないと結論付けられる。
$\beta_0 = \frac{1}{2}$ では上記矛盾が生じないので，この過程は $\sigma = \frac{1}{2}$ で止まる。
注意 2: $\log \zeta_K(s)$ が Dirichlet 級数に展開出来る事，即ち $\zeta_K(s)$ が Euler 積を持つ事が重要である。従って，一般に Euler 積 product を持つ zeta 関数 or L-関数に対しても，この論文の議論は適用出来るはずである。
[25] の訂正
p.447,↓ l.12　となるので→であるので
p.447,↓ l.13　不等式全体削除　delete the inequality
p.447,↓ l.14　となり，→削除

参考文献

[1] 藤崎源二郎 Fujisaki,G. 森田康夫 Morita,Y. 山本芳彦 Yamamoto,Y: 『数論への入門』, 日本評論社, 1980. *Introduction to Number Theory* (in Japanese), Nihon-Hyouron-sha, Tokyo, 1980.

[2] Goldstein,L.J.: *Analytic Number Theory*, Prentice-Hall, 1971.

[3] Iwaniec,H.: *Topics in Classical Automorphic Forms*, Amer. Math. Soc., 1997.

[4] Iwaniec,H. and Kowalski,E.: *Analytic Number Theory*, Amer. Math. Soc., 2004.

[5] Koch,H.: *Introduction to Classical Mathematics* I, Kluwer Academic Publisher, 1991. (translated by Stillwell, D. from Einführing in die Klassische Mathematik I, Academie-Verlag, Berlin, 1986.)

[6] Koch,H.: *Number Theory; Algebraic Numbers and Functions*, Amer. Math. Soc., 2000. (translated by Kramer, D. from the German ed. Friedr. Vieweg und Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig/Wiesbbaden, 1997.)

[7] Kowalski,E.: *Un cours de théorie analytique des nombres*, Société Mathématique de France, 2004.

[8] Landau,E.: *Handbuch der Leher von der Verteilung der Primzahlen*, Teubner, Leipzig, 1909, § 87,88. [Reprint: Chelsea 1953, Chelsea 1974, two volumes in one.]

[9] Landau,E.: *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Teubner, Leipzig, 1918. [Reprint: Chelsea, New York, 1949.]

[10] Lang,S.: *Algebraic Number Theory*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1986.

[11] 三井孝美 Mitsui,T.:『整数論：解析的整数論入門』至文堂，1970. *Number Theory; Introduction to Analytic Number Theory* (in Japanese), Shibunndo, Tokyo, 1970.

[12] 三井孝美 Mitsui,T.:『解析的数論』岩波書店，1989. *Analytic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1989.

[13] 森田康夫 Morita,Y.:『整数論』東京大学出版会，1999. *Number Theory* (in Japanese), Univ. of Tokyo Press, 1999.

[14] Ram Murty,M., Kumar Murty,V.: *Non-vanishing of L-Functions and Applications*, Birkhäuser, 1997.

[15] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 A Mean Value Integral, 鹿児島経済論集，第 59 巻 1 号, 2018 年 10 月, 1-31, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, October 2018, 1-31.

[16] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (II) A Mean Value Integral(II), 鹿児島経済論集，第 59 巻 2 号, 2018 年 12 月, 141-154, *The Kagoshima Journal of Economics*, **59**, December 2018, 141-154.

[17] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) A Mean Value Integral(III), 鹿児島経済論集，第 60 巻 1 号, 2019 年 7 月, 61-76, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 61-76.

[18] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 不完全 Gamma 関数の漸近公式 Asymptotic Formula of the Incomplete Gamma Function, 鹿児島経済論集, 第60巻4号, 2020年3月, 555-560, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this volume), March 2020, 555-560.

[19] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: ある平均値積分 (III) 補遺, A Mean Value Integral(III)Appendix the case:$\sigma < 1$, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 265-303, 出版予定, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this volume), December 2019, 265-303 to appear.

[20] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻1号, 2019年7月, 21-60. *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, July 2019, 21-60.

[21] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dirichlet の L 関数の Landau-Page-Siegel-龍沢零点, Landau-Page-Siegel-Tatuzawa's Zeros of Dirichlet's L-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻2号, 2019年9月, 153-193, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 153-193.

[22] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Ramanujan の L_τ 関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of Ramanujan's L_τ-Function, 鹿児島経済論集, 第60巻2号, 2019年9月, 195-240, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, September 2019, 195-240.

[23] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: 尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with cusp form f, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 305-350, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this Journal), December 2019, 305-350.

[24] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Maass 尖点形式 f に付随する L_f-関数の非自明な零点, Non-Trivial Zeros of L_f-Function associated with Maass cusp form f, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 351-405, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**(this Journal), December 2019, 351-405.

[25] 中嶋眞澄 Nakajima,M.: Dedekind の Zeta 関数の実軸から「離れている」非自明な零点, Non-Trivial Zeros that are "not near" the Real

Axis of the Dedekind Zeta-Functions, 鹿児島経済論集, 第60巻3号, 2019年12月, 407-451, *The Kagoshima Journal of Economics*, **60**, December 2019, 407-451.

[26] Narkiewicz,W.: *The Developmennt of Prime Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2000.
(邦訳：中嶋眞澄 訳『素数定理の進展・上』, 丸善出版, 訂正版2014, 2012, 『素数定理の進展・下』, 丸善出版, 2013)

[27] Narkiewicz,W.: *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, 3rd ed., Springer, Berlin, Heidelberg, 2004. (originally published by PWN(Polish Sci. Publ.), Warszawa, 1974.)

[28] Neukirch,J.: *Analytische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1992. (邦訳：梅垣敦紀 訳『代数的整数論』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2003.)

[29] Selberg,A.: On the normal density of primes in small intervals, and the difference between consecutive primes, *Arch. f. Math. og Naturv.*, **B. 47**(1943), No.6, 87-105.

[30] Siegel,C.L.: *Analytische Zahlentheorie*, Lecture Notes, Univ. of Göttingen, 1963/64.
(邦訳：片山孝次 訳『解析的整数論I, II』, 岩波書店, 2018)

[31] 末綱恕一 Suetuna,Z.:『整数論及代数学』新修輓近高等数学講座第16巻, 共立社, 1935. *Number Theory and Algebra* (in Japanese), Kyouritsu-Sha, Tokyo, 1935.

[32] 末綱恕一 Suetuna,Z.:『解析的整数論』岩波書店, 1950. (1935 岩波数学講座の一巻として出版) *Analytic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1950. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)

[33] 高木貞治 Takagi,T.:『代数的整数論　第2版』岩波書店, 1971. (1935 岩波数学講座の一巻として出版) *Algebraic Number Theory* (in Japanese), Iwanami-Shoten, Tokyo, 1971. (originally published as one of Iwanami lectures on Mathematics 1934-1935.)

[34] 龍沢周雄 Tatuzawa,T.:『関数論』共立出版，共立全書 233，1980. *Complex Function Theory* (in Japanese), Kyouritsu-Shuppan, Tokyo, 1980.

[35] Temme,N.M.: *Special Functions*, John Wiley & Sons, New York, 1996, § 11.2.3, § 11.2.4.

[36] Terras,A.: *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces —Euclidean Space, the Sphere, and the Poincaré Upper Half Plane—*, 2nd ed., Springer, 2013, (1st ed., 1985).

[37] Titchmarsh,E.C.: *The Theory of the Riemann Zeta-function*, Clarendon Press, Oxford, 1951. [2nd ed. revised by Heath-Brown,D.R., 1986.]

[38] 辻正次 Tsuji,M.:『複素函数論』，槇書店，1968. *Complex Function Theory* (in Japanese), Maki-Shoten, Tokyo, 1968.

(received 19 October 2019.)